

## Wahrscheinlichkeit und Statistik BSc D-INFK

<b>Name:</b>	
<b>Vorname:</b>	
<b>Stud. Nr.:</b>	

---

**Das Folgende bitte nicht ausfüllen!**

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			10
4			10

<b>Punktetotal:</b>	
<b>Vollständigkeit:</b>	

**Bitte wenden!**

# Hinweise zur Prüfung

---

**Prüfungsdauer:** 2 Stunden.

**Hilfsmittel:** 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

**Bitte beachten Sie folgende Punkte:**

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

**Siehe nächstes Blatt!**

# Aufgaben

---

## 1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Für jede richtig beantwortete Frage erhält man 1 Punkt, für jede falsch beantwortete Frage erhält man  $-1/2$  Punkte, und für jede nicht beantwortete Frage erhält man 0 Punkte. Insgesamt erhält man mindestens 0 Punkte für die gesamte Aufgabe. **Bitte benutzen Sie zur Beantwortung der Fragen das beiliegende Antwortblatt.**

- a) Seien  $A, B$  und  $C$  paarweise disjunkte Ereignisse. Des Weiteren seien Ereignisse  $D_1$  und  $D_2$  gegeben wie folgt:  
 $D_1 :=$  Höchstens eines der Ereignisse  $A, B, C$  tritt ein.  
 $D_2 :=$  Ereignis  $A$  kann nur eintreten, wenn weder  $B$  noch  $C$  eintritt.  
Welche der folgenden Aussagen trifft zu?
- (i) Die Ereignisse  $D_1$  und  $D_2$  stimmen überein.
  - (ii) Es gilt:  $D_2 = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$ .
  - (iii) Keiner der beiden Aussagen ist richtig.
- b) Wir werfen einen homogenen standard Würfel einmal und bezeichnen mit  $X$  die beobachtete Augenzahl. Dann gilt:
- (i)  $E(X) = \frac{1}{6}$ .
  - (ii)  $E(X^2) = \frac{91}{6}$ .
  - (iii)  $\text{Var}(X) = \frac{70}{6}$ .
- c) Sei  $X \sim \text{Geom}(p)$  und  $\text{Var}(X) = 2$ . Dann gilt:
- (i)  $p = 2$ .
  - (ii)  $E(X) = -1$ .
  - (iii)  $P(X = 2) = \frac{1}{4}$ .
- d) Welche stetige Verteilung hat die Eigenschaft der "Gedächtnislosigkeit"?
- (i) Die geometrische Verteilung.
  - (ii) Die Gleichverteilung.
  - (iii) Keiner der beiden Aussagen ist richtig.
- e) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $P[X > 0] = 1$  und Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  bzw. Dichtefunktion  $f_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und sei  $Y := \frac{1}{X}$ . Dann ist die Verteilungsfunktion  $F_Y(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  bzw. die Dichtefunktion  $f_Y(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  von  $Y$  gegeben durch:

**Bitte wenden!**

- (i)  $F_Y(y) = 1 - F_X(\frac{1}{y})$ .
  - (ii)  $f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\frac{1}{y})$ .
  - (iii) Keiner der beiden Aussagen ist richtig.
- f)** Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängige Poissonverteilte Zufallsvariablen mit  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$  bzw.  $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$  und sei  $X_3 := 1 + X_1 + X_2$ . Dann gilt:
- (i)  $X_3$  ist Poissonverteilt mit  $X_3 \sim \mathcal{P}(1 + \lambda_1 + \lambda_2)$ .
  - (ii)  $\text{Var}(X_3) = \lambda_1 + \lambda_2$ .
  - (iii) Keiner der beiden Aussagen ist richtig.
- g)** Seien  $X_1$  und  $X_2$  beide  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt und sei  $X_3 := 0.5(X_1 + X_2)$ . Dann gilt:
- (i)  $X_3 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
  - (ii)  $\text{Var}(X_3) < \sigma^2$ .
  - (iii) Keine der beiden Aussagen ist i.A. richtig.
- h)** Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unter  $P_\vartheta$  unabhängig und  $\text{Be}(\vartheta)$ -verteilt mit  $\vartheta \in [0, 1]$ , und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive reelle Zahlen mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Welche der folgenden Aussagen trifft zu?
- (i) Der Schätzer  $Y_1 := \sum_{i=1}^n X_i$  für den Parameter  $\vartheta$  ist erwartungstreu.
  - (ii) Der Schätzer  $Y_2 := \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$  für den Parameter  $\vartheta$  ist erwartungstreu.
  - (iii) Weder  $Y_1$  noch  $Y_2$  sind erwartungstreu.
- i)** Wenn das Niveau  $\alpha$  eines Tests kleiner wird, dann
- (i) wird die Macht des Tests kleiner.
  - (ii) wird die Macht des Tests grösser.
  - (iii) bleibt die Macht des Tests i.A. davon unbeeinflusst.
- j)** Beim Münzwurf wollen wir die Nullhypothese (einseitig) testen, dass es sich um eine faire Münze handelt. Die Münze wird viermal geworfen, wobei nur einmal Zahl fällt. Welche der folgenden Aussagen trifft bei diesen Beobachtungen zu?
- (i) Der  $P$ -Wert liegt unter 10%.
  - (ii) Der  $P$ -Wert liegt zwischen 10% – 30%.
  - (iii) Der  $P$ -Wert liegt über 30%.

**Siehe nächstes Blatt!**

## 2. (10 Punkte)

Eine neue Webanwendung wird von einer Gruppe von registrierten Usern getestet. Bei der Registrierung geben User ihren Browsertypen an.  $\frac{10}{11}$  der User verwenden den Browser *ChromzillaX*. Wenn man zum Test *ChromzillaX* benutzt, funktioniert die Anwendung mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{9}{10}$ , sonst nur mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$ . Ein User aus der Gruppe wird zufällig ausgewählt um die Anwendung zu testen. Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Webanwendung bei dem Test funktioniert.

a) Bestimmen Sie den Wert von  $p$ .

Manche der registrierten User, die nicht *ChromzillaX* verwenden, benutzen *FirezillaY* (insgesamt  $\frac{1}{22}$  der registrierten User), die übrigen verwenden andere Browser. Wenn man beim Test *FirezillaY* verwendet, funktioniert die Webanwendung mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$ .

b) Ein registrierter User berichtet, dass in seinem Test die Webanwendung funktionierte. Geben Sie in Abhängigkeit von  $p$  eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass es sich dabei um einen User mit Browser *FirezillaY* handelt.

c) Ein anderer User aus der Gruppe gibt an, weder *ChromzillaX*, noch *FirezillaY* zu verwenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Webanwendung in seinem Test funktioniert und begründen Sie Ihre Antwort.

### 3. (10 Punkte)

Eine Wetterstation zeichnet für jeden Tag die durchschnittliche Windgeschwindigkeit  $V$  sowie die maximale Windgeschwindigkeit  $M$  in km/h auf. Wir nehmen an, die gemeinsame Verteilung von  $V$  und  $M$  kann durch die gemeinsame Dichtefunktion

$$f(v, m) = \begin{cases} kv^k m^{-(1+k)} \lambda \exp(-\lambda v), & \text{falls } 0 \leq v \leq m, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für geeignete Parameter  $k \in \{2, 3, \dots\}$  und  $\lambda > 0$  beschrieben werden.

- a) Berechnen Sie die Randdichte  $f_V$  von  $V$ .
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert  $E[VM]$ .  
*Hinweis:* Sie können verwenden, dass  $\int_0^\infty \lambda v^2 \exp(-\lambda v) dv = \frac{2}{\lambda^2}$ .
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P[M \geq 2V]$ .

Falls Sie a) nicht gelöst haben, können Sie im folgenden die (falsche) Annahme verwenden, dass  $f_V(v) = 2\lambda \exp(-2\lambda v) I_{[0, \infty)}(v)$ .

- d) Berechnen Sie die Dichtefunktion  $f_W$  von  $W := \sqrt{V}$ .

Wir nehmen nun an, die täglichen durchschnittlichen Windgeschwindigkeiten  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 100$ , für die nächsten 100 Tage seien i.i.d. mit  $E[V_i] = 5$  und  $\text{Var}[V_i] = 25$ .

- e) Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz um approximativ die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die durchschnittliche Windgeschwindigkeit über die nächsten 100 Tage,  $\bar{V} := \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} V_i$ , über 6 km/h liegt.

#### 4. (10 Punkte)

Sie arbeiten bei einem Hersteller für Anstrichfarbe. Die Trocknungszeit eines bestimmten Typs von Anstrichfarbe unter festgelegten Testbedingungen ist normalverteilt mit Mittelwert 90 Minuten und Standardabweichung 10 Minuten. Chemiker schlagen einen neuen Zusatzstoff vor, der die mittlere Trocknungszeit verringern soll. Man glaubt, dass die Trocknungszeiten mit diesem Zusatzstoff weiterhin normalverteilt sind mit einer Standardabweichung von 10 Minuten.

Ihr Chef steht vor der Entscheidung, den neuen Zusatzstoff einzusetzen oder nicht. Er beauftragt Sie einen passenden statistischen Test durchzuführen. Der neue Zusatzstoff soll nur verwendet werden, wenn die Testergebnisse stark für eine Verminderung der mittleren Trocknungszeit sprechen.

- a) Welcher Test eignet sich aufgrund der Modellannahmen für ihr Vorhaben? Ist der Test einseitig oder zweiseitig?
- b) Geben Sie folgende Elemente des Tests für das Niveau  $\alpha = 1\%$  an:
  - (i) die Nullhypothese  $H_0$  und die Alternative  $H_A$ ,
  - (ii) die Teststatistik und ihre Verteilung unter  $H_0$ ,
  - (iii) den Verwerfungsbereich.

Um den Test durchzuführen, messen Sie die Trocknungszeiten von 25 Proben der Anstrichfarbe mit dem Zusatzstoff unter den festgelegten Testbedingungen. Das empirische Stichprobenmittel ist  $\bar{x}_{25} = 84$  und die empirische Stichprobenstandardabweichung ist  $s = 15$ .

- c) Führen Sie nun den Test auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  durch. Geben sie den beobachteten Wert der Teststatistik sowie den Testentscheid an.
- d) Nehmen Sie an, die wirkliche mittlere Trocknungszeit beträgt 85 Minuten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art für diese Alternative.
- e) Welchen Test können Sie durchführen, wenn sie *nicht* wissen, dass die Standardabweichung der Trocknungszeiten 10 Minuten ist. Wie lautet in diesem Fall die Teststatistik, ihre Verteilung unter der Nullhypothese, der Verwerfungsbereich, der beobachtete Wert der Teststatistik und der Testentscheid für das Niveau  $\alpha = 1\%$ ?

Viel Erfolg!