Aufgaben

---

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort $1/2$ Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmass und A, B, C Ereignisse mit $A \cap B \cap C = \emptyset$. Das Additionsgesetz $P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C]$ gilt:

1. Unter den oben genannten Voraussetzungen immer.
2. Falls A, B und C unabhängig sind.
3. Falls A, B und C paarweise disjunkt sind.

b) Seien X, Y unkorrelierte Zufallsvariablen mit $E[X] = E[Y] = 1$, $\mathrm{Var}[X] = 1$ und $E[Y^2] = 2$. Dann gilt:

1. $\mathrm{Var}\,[X - Y] = 2$.
2. $\mathrm{Var}\,[X - Y] = 0$.
3. $\mathrm{Var}\,[X + Y] = 4$.

c) Beim Wurf eines fairen Würfels bekommt man eine Auszahlung von 1 CHF falls die Augenzahlen 5 oder 6 fallen, sonst geht man leer aus. Es wird n-mal gewürfelt, wobei $n \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable X gibt die Auszahlung in CHF an, die man insgesamt bekommt. Es wird $E[X] = 1$ angegeben. Welche der Aussagen trifft zu?

1. X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}\left(6, \frac{1}{3}\right)$.
2. Es wurde nicht mehr als 3-mal gewürfelt.
3. $P[X = 0] > 0.5$.

d) Seien X und Y Poissonverteilt mit Parameter μ, $X, Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

1. Dann ist die Summe auch Poissonverteilt mit $(X + Y) \sim \mathcal{P}(\mu)$.
2. Dann ist die Summe auch Poissonverteilt mit $(X + Y) \sim \mathcal{P}(2\mu)$.
3. Keine der obigen beiden Behauptungen ist im Allgemeinen richtig.

e) Die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ der Zufallsvariablen X und Y sei auf dem Quadrat $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ konstant gleich c und Null ausserhalb. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

1. Man muss $c = 1$ wählen, damit $f(x, y)$ wirklich eine Dichte ist.

Bitte wenden!

2. Wenn $c = \frac{1}{4}$, dann sind die Zufallsvariablen unabhängig.
3. Keine der obigen beiden Behauptungen ist richtig.

f) Sei X eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable für ein $\sigma > 0$ und sei $Z := X \cdot Y$, wobei Y von X unabhängig ist und $P(Y = +1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$ gilt.

1. Dann sind Z und X unkorreliert.
2. Dann ist die Differenz normalverteilt, $(X - Z) \sim \mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$.
3. Keine der obigen Aussagen ist richtig.

g) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ haben. Sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

1. $\bar{X}_n$ konvergiert für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mu = E[X_1]$.
2. $\bar{X}_n$ konvergiert für $n \to \infty$ P-fast sicher gegen $\mu = E[X_1]$.
3. Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen richtig.

h) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_λ i.i.d $\sim \mathcal{P}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

1. Der Momentenschätzer für λ lautet $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
2. Der Momentenschätzer für λ lautet $\sum_{i=1}^n X_i$.
3. Der Momentenschätzer für λ lautet $n\sum_{i=1}^n X_i$.

i) Sei X binomialverteilt mit $X \sim \text{Bin}(3, p)$ für ein $p \in [0, 1]$. Wir wollen die Nullhypothese $H_0 : p = p_0 := 0.5$ testen. Bei welchen Beobachtungen von X wird H_0 von einem einseitigem Test ($H_A : p < p_0 = 0.5$) zum 5% Niveau verworfen?

1. Bei $x = 0$.
2. Bei $x = 0$ und $x = 1$.
3. H_0 wird bei keiner Beobachtung verworfen.

j) Bei der Berechnung des P-Wertes eines Tests

1. Braucht man die Daten nicht.
2. Braucht man die Formulierung der Alternative.
3. Braucht man ein vorgegebenes Niveau α.

2. (10 Punkte)

Eine Onlineplattform bietet Rechenleistung zur Verarbeitung von grossen Datenmengen an. Eine Einstellung wird entwickelt, die eine Überlastung der Server verhindern soll: Wenn die Server bereits ausgelastet sind (Ereignis A), soll beim Absenden eines neuen Rechenauftrags die Einstellung aktiv werden (Ereignis E). Diese lässt eine Fehlermeldung beim User erscheinen und blockiert die Bearbeitung des neuen Auftrags. Die Einstellung funktioniert noch nicht immer richtig. Es werden zwei Arten von Fehlern beobachtet: In 10% der Fälle bleibt die Einstellung inaktiv obwohl die Server bereits ausgelastet sind, andererseits in 20% der Fälle wird die Einstellung aktiv, obwohl die Server nicht ausgelastet sind.

a) Sie erhalten zunächst die Angabe dass die Server momentan mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ ausgelastet sind. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, dass es beim Absenden Ihres Auftrags zu einer Überlastung der Server kommt (d.h. die Server sind ausgelastet und die Einstellung wird nicht aktiviert) und dass Ihr Rechenauftrag problemlos bearbeitet wird (d.h. die Server sind nicht ausgelastet und die Einstellung wird nicht aktiviert).

b) Sei nun der Wert von p unbekannt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von p, dass beim Absenden Ihres Rechenauftrages die Einstellung aktiviert wird. Ab welchem Wert von p ist diese Wahrscheinlichkeit höher als 50%?

Sie erhalten die Angabe, dass die Einstellung insgesamt bei 30% aller Rechenaufträge aktiviert wird. Die Einstellung wird nun getestet: Es finden drei unabhängige Versuche statt, jeweils einen Rechenauftrag abzusenden.

c) Sei T die Anzahl der Versuche, bei denen die Einstellung aktiviert wird. Bestimmen Sie die Verteilung von T. Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei drei Versuchen die Einstellung k-mal aktiviert wird, wobei $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Liegt diese Wahrscheinlichkeit für $k = 1$ über 50%?

d) Gehen Sie weiter davon aus, dass die Einstellung beim Absenden Ihres Rechenauftrages mit Wahrscheinlichkeit 0.3 aktiviert wird. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit p, dass die Server ausgelastet sind?

3. (10 Punkte)

Die Lebensdauer X (in Jahren) einer bestimmten Art von CPU sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Durch Einsatz einer speziellen Wasserkühlung lässt sich die Lebensdauer der CPU um bis zu einem Jahr steigern. Wir nehmen an, die zusätzliche Lebensdauer Y ist auf $[0, 1]$ gleichverteilt und unabhängig von X.

a) Sei $W := X + Y$ die gesamte Lebensdauer einer wassergekühlten CPU. Berechnen Sie die Dichtefunktion f_W von W.
Hinweis: Die Dichte der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist gegeben durch die Faltung ihrer Dichten $f_W(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$, $z \in \mathbb{R}$, oder $f_W(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x)\,\mathrm{d}x$, $z \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von W.
Hinweis: Sie können ohne Begründung verwenden, dass $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ und $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$. Andere Erwartungswerte und Varianzen dürfen nicht als bekannt angenommen werden.

Die Lebensdauer Z einer *luftgekühlten* CPU habe die Dichtefunktion

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha^2 z \exp(-\alpha z), & z \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1}$$

für einen Parameter $\alpha > 0$.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Z von Z.

d) Seien $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. mit Dichtefunktion (1). Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter α.

Wir nehmen an, wir haben 100 CPUs, die alle unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ innerhalb der nächsten 10 Jahre kaputt gehen.

e) Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz mit Kontinuitätskorrektur um die Wahrscheinlichkeit, dass 40 CPUs innerhalb der nächsten 10 Jahre kaputt gehen, approximativ zu bestimmen d.h. berechnen Sie $P[39.5 < S \leq 40.5]$, wobei S die Anzahl der CPUs angibt, die innerhalb der nächsten 10 Jahre kaputt gehen.

4. (10 Punkte)

Um Ihre elektronischen Daten jederzeit verfügbar zu haben, haben Sie sich Speicherplatz auf einem Webserver gemietet. Ihr Anbieter behauptet eine mittlere *Übertragungssrate* von mindestens 10 Mbit/s (Megabit pro Sekunde) bereitzustellen. Da sie Zweifel an dieser Behauptung haben, messen Sie die durchschnittliche Übertragungsrate einer Datei an 9 verschiedenen Tagen. Ihre Messungen sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mbit/s x_i	9.4	10.1	9.4	9.8	10.3	9.6	9.9	9.9	9.8

empirisches Stichprobenmittel: $\bar{x}_9 = 9.8$
empirische Stichprobenstandardabweichung $s = 0.3$

Nehmen Sie an, dass die Daten i.i.d. normalverteilt sind.

a) Welcher Test eignet sich, um Ihre Vermutung zu überprüfen? Ist der Test einseitig oder zweiseitig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Führen sie den statistischen Test für das 5%-Niveau durch. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Formulieren Sie eine geeignete Nullhypothese H_0 und Alternative H_A.
(ii) Geben Sie die Teststatistik und deren Verteilung unter H_0 an.
(iii) Ermitteln Sie den Verwerfungsbereich.
(iv) Berechnen Sie den beobachteten Wert der Teststatistik.
(v) Geben Sie den Testentscheid an.

Ihr Kollege interessiert sich für die *Übertragungszeit* von Datenpaketen (in Millisekunden) an den Server seines Anbieters. Er hat einen einseitigen z-Test durchgeführt. Seine Nullhypothese und Alternative lauten

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 100 \quad \text{und} \quad H_A : \mu > \mu_0.$$

Er teilt Ihnen mit, dass der beobachtete Wert der Teststatistik 2 ist und der Verwerfungsbereich von der Form $[c, \infty)$ ist für ein $c \in \mathbb{R}$. Ferner nehmen wir an, dass die Übertragungszeiten i.i.d. normalverteilt sind mit Standardabweichung $\sigma = 10$.

c) Berechnen Sie den P-Wert dieses Tests, d.h. das kleinste Niveau, auf dem der Test die Nullhypothese gerade noch verwirft.

d) Nehmen Sie an, dass $c = 2.72$. Wie gross muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, so dass die Macht des Tests für die Alternative $\mu_A = 110$ mindestens 90% beträgt?