D–INFK

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00S

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-XXX-XXX

Prüfungs-Nr.

044

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt Ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der Antwortmöglichkeiten richtig. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.
Bemerkung: Die maximale Punktzahl für den Multiple-Choice-Teil bleibt 30 Punkte. Wenn mehr als 30 Punkte erreicht werden, wird dennoch die maximale Punktzahl von 30 Punkten angerechnet.

1.MC1 [3 Punkte] Gegeben seien zwei Ereignisse C und D mit $\mathbb{P}[D] > 0$. Es sei bekannt, dass $\mathbb{P}[C \mid D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - 1$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(A) $\mathbb{P}[C \cup D] = 1 - \mathbb{P}[(C^c) \cap (D^c)]$
(B) $\mathbb{P}[C \cap D] = \Big(\mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - 1\Big) \cdot \mathbb{P}[D]$
(C) $\mathbb{P}[C \cap D] = \mathbb{P}[C] \cdot \mathbb{P}[D]$
(D) $\mathbb{P}[C \cup D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - \mathbb{P}[C \cap D]$

1.MC2 [3 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{4}.$$

Was ist die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X?

(A)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } x = -1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } x = 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(B)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } x = -1, \\ \frac{3}{4} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x = 2, \\ 0 & \text{für } x \notin \{-1, 0, 2\}. \end{cases}$$

(C)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -1 < x \leq 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(D)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

1.MC3 [3 Punkte] Gegeben seien drei Ereignisse A, B und C mit $\mathbb{P}[A] > 0$, $\mathbb{P}[B] > 0$, $\mathbb{P}[C] > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist **wahr**?

(A) $\mathbb{P}[A \mid (B \cap C)] \geq \mathbb{P}[A \mid B \cup C]$

(B) $\mathbb{P}[A \mid (B \cup C)] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[A \cap B \cap C]}{\mathbb{P}[B \cup C]}$

(C) $\mathbb{P}[A \cap (B \cup C)] = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C]$

(D) $B \subset C \implies \mathbb{P}[A \mid B] \neq \mathbb{P}[A \mid C]$

1.MC4 [3 Punkte] Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f. Welche Aussage ist korrekt?

(A) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot x \cdot y \, dx \, dy$

(B) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \, dx \, dy$

(C) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

(D) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

1.MC5 [3 Punkte] Welche der folgenden Funktionen ist eine Dichte?

(A) $k(x) = (x^2 - \frac{5}{6}x) \cdot 1_{0 \leq x \leq 2}$.

(B) $h(x) = (1 - x^2) \cdot 1_{-1 \leq x \leq 1}$,

(C) $f(x) = 2e^{-2x} \cdot 1_{x \geq 0}$,

(D) $g(x) = \frac{1}{3}x \cdot 1_{0 \leq x \leq 3}$,

1.MC6 [3 Punkte] Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}\text{ar}(X_k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei S_n definiert durch

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{V}\text{ar}\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) ∞

(D) 1

1.MC7 [3 Punkte] Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Poisson}(1)$ und $Y \sim \text{Poisson}(2)$. Berechne die Varianz von $Z = \frac{X - Y}{2}$.

(A) $\mathbb{V}\text{ar}(Z) = 1$

(B) $\mathbb{V}\text{ar}(Z) = \frac{3}{4}$

(C) $\mathbb{V}\text{ar}(Z) = \frac{3}{2}$

(D) $\mathbb{V}\text{ar}(Z) = \frac{1}{2}$

1.MC8 [3 Punkte] Seien (X_n) unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$. Wir betrachten den Grenzwert

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) $A = +\infty$
(B) $A = 0$
(C) $A = \frac{1}{4}$
(D) $A = 1$

1.MC9 [4 Punkte] Gegeben seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{U}([-1,1])$, also gleichverteilt auf dem Intervall $[-1,1]$. Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Betrachte den Grenzwert:

$$A := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[-1 \leq S_n \leq 1].$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) $A = 0$
(B) $A = \infty$
(C) $A = 1$
(D) $A = \frac{1}{2}$

1.MC10 [4 Punkte] Gegeben seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Bestimme eine erwartungstreue (unverzerrte) Schätzung für λ^2 basierend auf der Stichprobe.

(A) $\hat{\lambda}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$
(B) $\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
(C) $\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
(D) $\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 1)$

1.MC11 [4 Punkte] Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{U}([0,1])$, d.h., sie sind gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$. Sei $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ und $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Bestimme den Erwartungswert von $M_n := \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$.

(A) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$
(B) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{2}$
(C) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{n+1}{2(n+2)}$
(D) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{n}{2(n+1)}$

Aufgabe 2

2.A1 [2 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}[X=5]=\frac{3}{5},\quad \mathbb{P}[X=10]=\frac{1}{10},\quad \mathbb{P}[X=13]=0\quad \text{und}\quad \mathbb{P}[X=20]=\frac{3}{10}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

2.A2 [3 Punkte] Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ definiert durch

$$f(x,y)=\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}\,\mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}}.$$

Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

2.A3 [5 Punkte] Seien $\lambda>0$ und

$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

wobei $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $\operatorname{Exp}(\lambda)$ verteilt sind. Das heisst, die Dichte von X_1 ist gegeben durch

$$f_{X_1}(x)=\lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

3.A1 [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n^2]$.

3.A2 [3 Punkte] Gegeben ist zusätzlich, dass $\mathbb{P}[X_1 = 0] > 0$ und $\mathbb{P}[X_1 \leq 1] = \frac{2}{3}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[S_n \leq 1 \mid S_{n-1} = 0]$.

3.A3 [2 Punkte] Argumentieren Sie, warum $\mathbb{P}\left[\frac{S_n^2}{n} \geq 2\sigma^2\right] \leq \frac{1}{2}$.

3.A4 [4 Punkte] Gegeben ist $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right] = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie σ. **Hinweis:** $\Phi(0.43) = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 4

Ein Motorrad läuft im Mittel 2 Jahre bis zur ersten Störung. Die Einsatzdauer T (in Jahre) wird von einer Gewichtsfunktion p_T beschrieben, wobei

$$p_T(t) = \mathbb{P}(T = t) = (1 - \vartheta)^{t-1}\vartheta, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit Parameter $\vartheta \in (0, 1)$. Die Familie F. möchte diese Verteilung genauer bestimmen. Für die fünf Moterräder dieser Familie wurden die folgenden Zeiten bis zur ersten Störung beobachtet:

$$t_1 = 4,\ t_2 = 0,\ t_3 = 1,\ t_4 = 6,\ t_5 = 2.$$

4.A1 [5 Punkte] Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion und leiten Sie daraus den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für den Parameter ϑ her. Wie lautet der realisierte Schätzwert?

4.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Momentenschätzer T_{MM} für ϑ. Wie lautet der realisierte Schätzwert?

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{E}_\vartheta[T] = 1/\vartheta$.

4.A3 [3 Punkte] Seien $\vartheta \in (0, 1)$ and $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Wir nehmen nun an, dass T_i unabhängig und $\mathrm{Bin}(8, \vartheta)$ verteilt sind. Berechnen Sie $\mathrm{MSE}_\vartheta(T_M)$, wobei

$$T_M = \frac{\sum_{i=1}^{5} T_i}{40}.$$