D–INFK

Prüfung Wahrscheinlichkeit & Statistik

401-0614-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. Multiple Choice **[10 Punkte]**

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für jede falsch beantwortete Frage gibt es 0.5 Punkte Abzug. Für jede nicht beantwortete Frage gibt es 0 Punkte. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

(a) Seien A, B und C Ereignisse. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein wahr?

1. Falls A und B sowie A und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.
2. Falls A und B sowie B und C unabhängig sind, so sind auch A und C unabhängig.
3. Falls A, B und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.

(b) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 1 und Standardabweichung 2. Dann ist

1. $E[X^2] = 3$.
2. $E[X^2] = 5$.
3. $E[X^2] = 1$.
4. $E[X^2] = 4$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-\mu x}, & \text{falls } x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\mu > 0$. Damit f zu einer Dichte wird, muss

1. $c = \mu$ sein.
2. $c = \mu e^{\mu}$ sein.
3. $c = \frac{1}{\mu}$ sein.

(d) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f_X, und sei F_X ihre Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?

1. F_X ist stetig.
2. F_X ist strikt monoton wachsend.
3. $P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a)$ für $-\infty < a \leq b < \infty$.

(e) Seien X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist sicher **falsch**?

1. Aus $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ kann man nicht die Unabhängigkeit von X und Y folgern.
2. Sind X und Y unabhängig, so gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$.
3. Falls X und Y unabhängig sind, so gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(f) Sei $X \sim Bin(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Die momenterzeugende Funktion von X ist

1. $M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$.
2. $M_X(t) = (1-p)^{tn}$.
3. $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$.
4. $M_X(t) = \exp\big(pn(e^t-1)\big)$.

(g) Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen, welche alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ besitzen. Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

1. $\overline{X}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ in Wahrscheinlichkeit.
2. $\overline{X}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ P-fastsicher.
3. Im Allgemeinen gilt weder 1. noch 2.

(h) Seien X und Y zwei reellwertige und unabhängige Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein wahr?

1. Falls $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim Exp(\mu)$ für $\lambda, \mu > 0$, so ist $X+Y \sim Exp(\lambda+\mu)$.
2. Falls $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ und $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ für $\lambda, \mu > 0$, so ist $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
3. Falls $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{U}(1,2)$, so ist $X+Y \sim \mathcal{U}(0,2)$.

(i) Welche von den folgenden Funktionen ist **keine** Dichte?

1. $f(x) = \dfrac{3}{4}(1-x^2)I_{\{x^2\le 1\}}$.
2. $g(x) = I_{[0,1/2]}(x) + 2I_{[3/4,1]}(x)$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$.

(j) Falls zu einem gegebenen Test die Hypothese auf dem 2.5%-Niveau abgelehnt wird, dann

1. wird sie auch auf dem 5%-Niveau abgelehnt.
2. wird sie auch auf dem 1%-Niveau abgelehnt.
3. kann man im Allgemeinen nicht behaupten, dass sie auf einem höheren oder tieferen Niveau auch abgelehnt wird.

2. Autoversicherung **[10 Punkte]**

Eine Versicherungsgesellschaft hat drei Kategorien A, B und C von AutofahrerInnen unter ihren Versicherten. Personen in der Kategorie A haben eine Unfallwahrscheinlichkeit pro Jahr von 0.1, Personen in der Kategorie B von 0.3 und Personen in der Kategorie C von 0.5. In Kategorie A werden 40%, in Kategorie B 50% und in Kategorie C 10% der Versicherten eingeteilt.

(a) [**6 Punkte**]

Nehmen Sie an, dass Unfälle einer versicherten Person während verschiedenen Jahren unabhängig sind und mit konstanten Wahrscheinlichkeiten auftreten. Berechnen Sie für Personen aus den Kategorien A, B und C jeweils die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten 5 Jahren unfallfrei zu bleiben.

(*Hinweis:* Ein Ergebnis der Form ab^c muss nicht weiter numerisch ausgerechnet werden.)

(b) [**2 Punkte**]

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine versicherte Person, von der man nicht weiss, zu welcher Kategorie sie gehört, im ersten Jahr einen Unfall hat.

(c) [**2 Punkte**]

Ein Kunde, der seit einem Jahr bei dieser Versicherungsgesellschaft ist, hat in diesem Jahr einen Unfall gehabt. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Kunde zur Kategorie C gehört?

3. Heisse und kalte Reserve **[10 Punkte]**

Ein System besteht aus einem Bauteil A und einem Reservebauteil B. Fällt das Bauteil A aus, so übernimmt das Reservebauteil B seine Funktion. Es bezeichne T_A bzw. T_B die (zufällige) Lebensdauer des Bauteils A bzw. des Reservebauteils B (in Tagen). Das Reservebauteil B wird als heisse Reserve bezeichnet, falls es erst *nach dem Ausfall* von Bauteil A aktiviert wird, und als kalte Reserve, falls es *gleichzeitig* mit dem Bauteil A aktiviert wird. Die Lebensdauer des Systems ist also bei kalter Reserve $L_K = \max\{T_A, T_B\}$ und bei heisser Reserve $L_H = T_A + T_B$. Nehmen Sie an, dass T_A und T_B unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ sind.

(a) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie die Dichte f_{L_K} von L_K und die Dichte f_{L_H} von L_H.

(b) [**1 Punkt**] Welcher Verteilung folgt L_H?

(c) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die Erwartungswerte $E[L_H]$ und $E[L_K]$.

(*Hinweis:* Falls Sie die Dichte f_{L_K} in (a) nicht gefunden haben, so können Sie stattdessen mit der Dichte $f_{L_K}(z) = c(e^{-\lambda z} + e^{-3\lambda z})I_{\{z\geq 0\}}$ rechnen.)

(d) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ aus je n unabhängigen Beobachtungen der Lebensdauern T_A und T_B. Dazu gehört auch die Herleitung.

4. Vergleich zweier Schlafmittel **[10 Punkte]**

Die Wirkung von zwei Schlafmitteln 1 und 2 soll verglichen werden. Dazu werden $n = 9$ Patienten in zwei zeitlich klar getrennten Zeiträumen die Medikamente 1 bzw. 2 verabreicht und pro Patient die jeweilige durchschnittliche Schlafdauer (in Stunden) gemessen. Es ergaben sich folgende Daten:

Patient i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Schlafmittel 1: Schlafdauer x_i	8.3	8.7	8	8	8.35	7.6	8.1	8.5	7.8
Schlafmittel 2: Schlafdauer y_i	9	8.5	8	7.5	7	7	8.5	9	7.5

Nehmen Sie an, dass die durchschnittlichen Schlafdauern mit den Schlafmitteln 1 und 2 normalverteilt sind und dieselbe Varianz $\sigma^2 = 2/9$ (also Standardabweichung $\sigma \approx 0.47$) besitzen. Wir möchten auf dem 5%-Niveau testen, ob eines der Schlafmittel besser wirkt.

Kennzahlen: $\overline{x}_9 = 8.15$, $\overline{y}_9 = 8$.

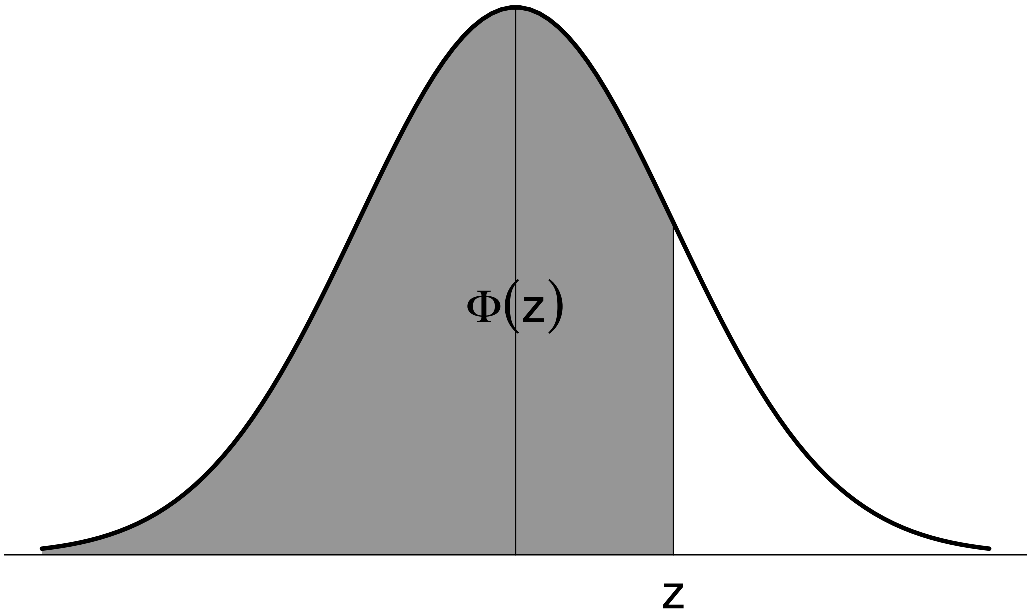
(a) [**8 Punkte**]

Führen Sie einen geeigneten Test durch. Geben Sie dazu

i. das Modell,
ii. die Hypothese und Alternative,
iii. die Teststatistik,
iv. die Verteilung der Teststatistik unter der Hypothese,
v. den Verwerfungsbereich,
vi. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
vii. den Testentscheid an.

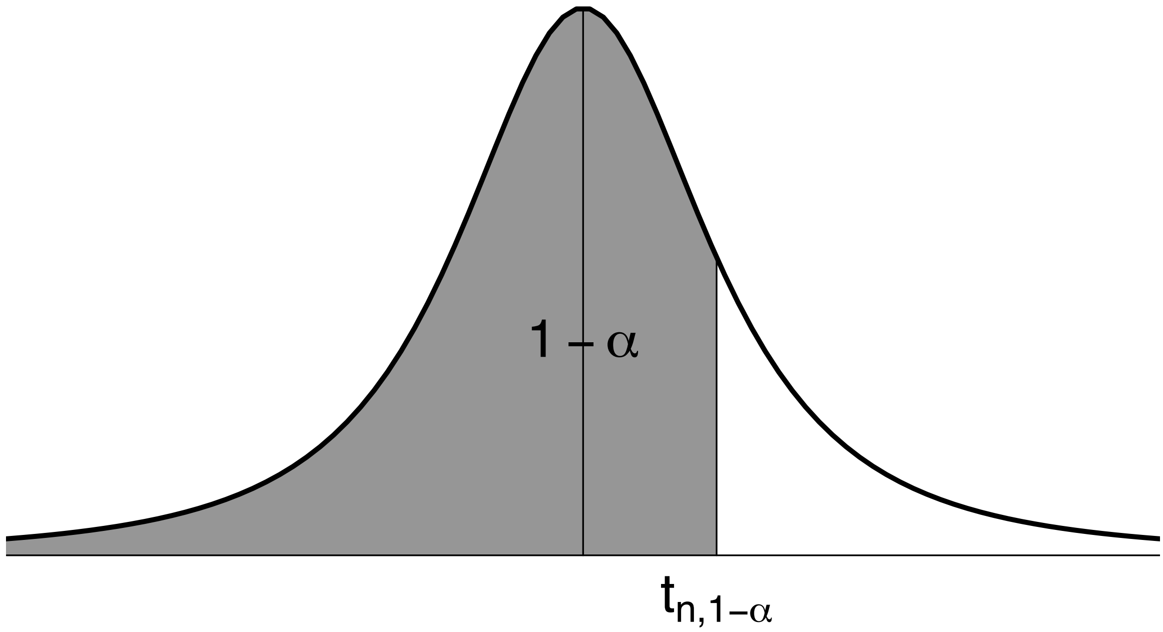
(b) [**2 Punkte**] Beschreiben Sie in Worten, was der Fehler 2. Art ist, und bestimmen Sie mit den Tabellen dessen Wahrscheinlichkeit an der Stelle $\mu_A = 0.1$. Dabei ist μ_A die Differenz der erwarteten Schlafdauern bei den Medikamenten 1 und 2.

(*Hinweis:* Die vorhandenen Tabellen genügen, um diese Aufgabe zu lösen. Bei Bedarf können Sie grosszügig interpolieren.)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Tabelle der Standard-Normalverteilungsfunktion $\Phi(z) = P[Z \leq z]$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.


1 – α
t_{n,1−α}

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Ausgewählte Quantile $t_{n,1-\alpha}$ der t-Verteilung; in der Tabelle ist $n = df$.
Für $df = \infty$ erhält man die Quantile $z_{1-\alpha}$ der Standard-Normalverteilung.