D–INFK

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00L

Nachname
XX

Vorname
XX

Legi-Nr.
XX-XXX-XXX

Prüfungs-Nr.
380

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Multiple Choice

1. Aufgabe **[30 Punkte]**

Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt Ihre Antwort an. Es ist jeweils **genau eine** Antwort korrekt. Punktabzug bei falschen Antworten gibt es **nicht**. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

Bemerkung: Die maximale Punktzahl für den Multiple-Choice-Teil bleibt 30 Punkte. Wenn mehr als 30 Punkte erreicht werden, wird dennoch die maximale Punktzahl von 30 Punkten angerechnet.

1.MC1 **[2 Punkte]** Betrachten Sie zwei Ereignisse C und D mit $\mathbb{P}[D] > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen wahr?

(A) $\mathbb{P}[C \cup D] = \mathbb{P}[C \mid D]\,\mathbb{P}[D]$,
(B) $\mathbb{P}[C \cup D] = 1 - \mathbb{P}[C \cap D]$,
(C) $\mathbb{P}[C \cup D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D]$,
(D) $\mathbb{P}[C \cup D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - \mathbb{P}[C \mid D]\mathbb{P}[D]$.

1.MC2 **[3 Punkte]** Sei Y eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[Y = -2] = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}[Y = 1] = \frac{2}{5}$ und $\mathbb{P}[Y = 3] = \frac{2}{5}$. Was ist die Verteilungsfunktion F_Y von Y?

(A)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -2, \\ \frac{1}{5} & \text{für } y = -2, \\ \frac{2}{5} & \text{für } y = 1, \\ 1 & \text{für } y = 3, \\ 0 & \text{für } y \notin \{-2, 1, 3\}, \end{cases}$$

(B)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq -2, \\ \frac{1}{5} & \text{für } -2 < y \leq 1, \\ \frac{3}{5} & \text{für } 1 < y \leq 3, \\ 1 & \text{für } y > 3, \end{cases}$$

(C)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -2, \\ \frac{1}{5} & \text{für } y = -2, \\ \frac{3}{5} & \text{für } y = 1, \\ 1 & \text{für } y = 3, \\ 0 & \text{für } y \notin \{-2, 1, 3\}, \end{cases}$$

(D)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < -2, \\ \frac{1}{5} & \text{für } -2 \leq y < 1, \\ \frac{3}{5} & \text{für } 1 \leq y < 3, \\ 1 & \text{für } y \geq 3. \end{cases}$$

1.MC3 [3 Punkte] Seien A, B und C Ereignisse. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein **falsch**?

(A) Falls $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C]$, folgt daraus nicht, dass sie gemeinsam unabhängig sind,
(B) $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] \geq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C]$,
(C) Falls A und B sowie B und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cup C$ unabhängig,
(D) Falls A, B und C unabhängig sind, so sind $A \cup B$ und C unabhängig.

1.MC4 [3 Punkte] Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f_X, und sei F_X ihre Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?

(A) $F_{X^2}(4) = \int_{-2}^{2} f_X(t)dt$,
(B) $F_{X^4}(1) = 3\int_{-1}^{1} f_X(t)dt$,
(C) $F_X(b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt$,
(D) $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)dt - \mathbb{P}[X = a]\,\mathbb{P}[X = b]$ für $-\infty < a \leq b < \infty$.

1.MC5 [2 Punkte] Welche von den folgenden Funktionen ist **keine** Dichte?

(A) $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin(\pi x) \cdot \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 1}$,
(B) $k(x) = C \log\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 10}$ für einige konstante C,
(C) $h(x) = \frac{4}{3}(1 - x^3) \cdot \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 1}$,
(D) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

1.MC6 [3 Punkte] Seien X und Y zwei reellwertige und unabhängige Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein wahr?

(A) Falls $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ für $\lambda, \mu > 0$, so ist $X + 2Y \sim \text{Poisson}(\lambda + 2\mu)$,
(B) Falls $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, so ist $2X - Y \sim \mathcal{N}(2\mu_1 - \mu_2, 4\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$,
(C) Falls $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $Y \sim \mathcal{U}(1, 2)$, so ist $X + Y \sim \mathcal{U}(0, 2)$,
(D) Falls $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ für $\lambda > \mu > 0$, so ist $X - Y \sim \text{Exp}(\lambda - \mu)$.

1.MC7 [3 Punkte] Seien X und Y zwei nicht-negative Zufallsvariablen mit den folgenden Eigenschaften:

$$\text{Var}(X) = 9, \quad \text{Var}(Y) = 11, \quad \mathbb{E}[X] = 4, \quad \mathbb{E}[Y^2] = 20, \quad \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Dann ist $\text{Var}\left(\frac{1}{3}(X - Y)\right)$ gleich:

(A) $\frac{20}{3}$,
(B) $\frac{44}{9}$,
(C) $\frac{44}{3}$,
(D) $\frac{20}{9}$.

1.MC8 [4 Punkte]
Sei (X_n) i.i.d. $\mathcal{U}(0,5)$-verteilt. Wir betrachten den P-f.s. grenzwert

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) $A = \frac{25}{3}$,
(B) $A = +\infty$,
(C) $A = \frac{25}{4}$,
(D) $A = 0$.

1.MC9 [4 Punkte] Sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $T_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$. Sei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, also $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Welche Aussage ist korrekt?

(A) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n T_i \leq n + a\sqrt{n/12}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$,
(B) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{n+a\sqrt{n}}{0.5}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$,
(C) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n T_i \leq n + a\sqrt{n}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$,
(D) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n T_i \leq n/2 + a\sqrt{n/12}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

1.MC10 [3 Punkte] Sei $\Theta = (0,\infty)$, und $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$, wobei μ ein unbekannter Parameter ist. Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für μ?

(A) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{4n}$,
(B) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$,
(C) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{2n}$,
(D) $\frac{2n}{X_1+\ldots+X_n}$.

1.MC11 [3 Punkte] Sei $\Theta = \mathbb{R}$. Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, sodass $X_1, \dots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 = 4$ bekannt und μ ein unbekannter Parameter ist. Welcher der folgenden Schätzer ist **nicht** erwartungstreu für μ?

(A) $T_1^n = \sqrt[n]{|X_1 \cdot ... \cdot X_n|}$,

(B) $T_4^n = X_1 + X_1X_2 - X_n^2 + 4, \quad n > 1$,

(C) $T_3^n = \frac{1}{2}(X_1 + X_n), \quad n > 1$,

(D) $T_2^n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$.

2. Aufgabe **[10 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Seien X, Y i.i.d. Zufallsvariablen mit $X, Y \sim \text{Exp}(1)$. Wir definieren $L = \min(X, Y)$ und $M = \max(X, Y)$.

(a) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von M.

(b) [**4 Punkte**] Berechnen Sie $\mathbb{P}[L \geq x, M \leq y]$ für $0 \leq x \leq y$.

(c) [**3 Punkte**] Berechnen Sie $\mathbb{P}[L \geq x \mid M \leq y]$ für $x = \log(2)$ und $y = \log(4)$.

3. Aufgabe **[10 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 kontinuierlich ist mit

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1]$ und die Varianz $\sigma^2_{X_1}$ von X_1.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partialsummen

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(b) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von T_n.

(c) **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left[T_n \geq \frac{5}{4}\sqrt{n}\right] < \frac{3}{5}.$$

(d) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{\sqrt{n}}$$

in Wahrscheinlichkeit.

(e) **[3 Punkte]** Zeigen Sie, dass

$$\frac{\frac{3}{2}T_n - \sqrt{n}}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

und finden Sie den Parameter σ^2, sodass diese Bedingung erfüllt ist.

4. Aufgabe **[10 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Ein Milliardär zieht eine Investition in der Schweiz in Betracht. Dazu beobachtet er die Renditen von 6 Schweizer Hedgefonds über ein Jahr. Es wird angenommen, dass die Renditen $X_1, ..., X_6$ (in Prozent, d.h. $X_1 = 7$, falls die Rendite des 1. Hedgefonds im Jahr 7% beträgt) dieser 6 Hedgefonds unabhängig und normalverteilt seien mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 16$. Das bedeutet

$$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq 6.$$

Am Ende des ersten Jahres beobachtet der Milliardär die folgende Stichprobe:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	6	12	8	4	0

(a) **[2 Punkte]** Berechnen Sie das empirische Stichprobenmittel $\bar{x}_6$ und die empirische Stichprobenvarianz s^2.

(b) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für μ.

Wir nehmen nun an, dass die Renditen $X_1, \dots X_n$ unabhänging und gleichverteilt auf einem Intervall $[a, b]$ sind. Das bedeutet

$$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{U}(a, b) \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{und für} \quad a < b \in \mathbb{R}.$$

(c) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Ordnungsstatistik $X_{(n)}$, wobei $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

(d) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für $\vartheta = (a, b)$.

Hinweis: Die Likelihood-Funktion ist nicht differenzierbar. Das Maximum der Likelihood-Funktion muss daher auf eine andere Art bestimmt werden.