Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Christina wirft zwei sechsseitige Würfel. Seien die Augenzahlen X und Y.

1.MC1 [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass X gerade ist und Y durch 3 teilbar ist?

(A) 1/12
(B) 1/6
(C) 1/3
(D) 5/6

Lösung:

Da X und Y unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}[X \in \{2,4,6\}, Y \in \{3,6\}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

1.MC2 [2 Punkte] Was ist $\mathbb{P}[X > Y]$?

(A) 1/3
(B) 5/12
(C) 1/2
(D) 7/12

Lösung:

Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}[X > Y] = \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}[X > Y \mid Y = j]\mathbb{P}[Y = j] = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}[X > j] = \frac{5+4+3+2+1+0}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist $\mathbb{P}[X + Y \geq 7 \mid X = 2]$?

(A) 1/3
(B) 1/2
(C) 2/3
(D) 5/6

Lösung:

$$\mathbb{P}[X + Y \geq 7 \mid X = 2] = \mathbb{P}[Y \geq 5 \mid X = 2] = \mathbb{P}[Y \geq 5] = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

1.MC4 [2 Punkte] Was ist $\mathbb{P}[X = 5 \mid X + Y = 10]$?

(A) 1/3
(B) 1/2
(C) 2/3
(D) 5/6

Lösung:

$$\mathbb{P}[X = 5 \mid X + Y = 10] = \frac{\mathbb{P}[X = 5, X + Y = 10]}{\mathbb{P}[X + Y = 10]} = \frac{\mathbb{P}[X = 5, Y = 5]}{\mathbb{P}[X + Y = 10]} = \frac{1/36}{3/36} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

1.MC5 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert $\mathbb{E}[(X-3)(Y-1)^2]$?

(A) 37/12
(B) 43/12
(C) 49/12
(D) 55/12

Lösung:

Da X und Y unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{E}[(X-3)(Y-1)^2] = \mathbb{E}[X-3] \cdot \mathbb{E}[(Y-1)^2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{0+1+4+9+16+25}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{55}{6} = \boxed{\frac{55}{12}}.$$

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Mengen ist **keine** σ-Algebra?

(A) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

(B) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{A, B, C\}\}$

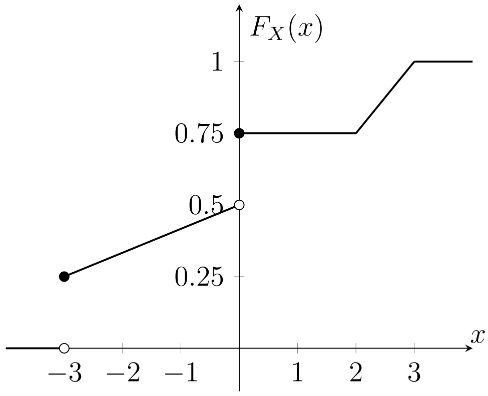
(C) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}\}$

(D) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$

Lösung:

$\boxed{\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}\}}$ ist keine σ-Algebra, da $\{\clubsuit\}, \{\spadesuit\} \in \mathcal{F}$, während $\{\clubsuit\} \cup \{\spadesuit\} = \{\clubsuit, \spadesuit\} \notin \mathcal{F}$.

2.MC2 [2 Punkte] Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X. Welche der folgenden Wahrscheinlichkeiten ist **am kleinsten**?



(A) $\mathbb{P}[-3 \leq X < 0]$

(B) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 3]$

(C) $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1]$

(D) $\mathbb{P}[-3 < X \leq 0]$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[-3 \leq X < 0] &= F_X(0-) - F_X\big((-3)-\big) = 0.5 - 0 = 0.5, \\
\mathbb{P}[0 \leq X \leq 3] &= F_X(3) - F_X(0-) = 1 - 0.5 = 0.5, \\
\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1] &= F_X(1) - F_X(-1) = 0.75 - 5/12 = 1/3, \\
\mathbb{P}[-3 < X \leq 0] &= F_X(0) - F_X(-3) = 0.75 - 0.25 = 0.5,
\end{aligned}$$

also ist $\boxed{\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1]}$ am kleinsten.

2.MC3 [2 Punkte] Welche der folgenden Ungleichungen gilt **nicht** für alle beschränkten Zufallsvariablen $X \geq 0$ und alle Konstanten $\lambda > 0$?

(A) $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[X]/\lambda$

(B) $\mathbb{P}\Big[X \geq \lambda + \mathbb{E}[X]\Big] \leq \mathrm{Var}(X)/\lambda^2$

(C) $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \exp(\mathbb{E}[X] - \lambda)$

(D) $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[\exp(2X - 2\lambda)]$

Lösung:

$\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[X]/\lambda$ ist die Markov-Ungleichung, $\mathbb{P}[X \geq \lambda + \mathbb{E}[X]] \leq \mathrm{Var}(X)/\lambda^2$ folgt aus der Chebyshev-Ungleichung und $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[\exp(2X - 2\lambda)]$ ist eine Chernoff-Schranke. Andererseits gilt $\boxed{\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \exp(\mathbb{E}[X] - \lambda)}$ nicht für alle beschränkten Zufallsvariablen X. Zum Beispiel, wenn $\lambda = 2$, $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{2}$, dann ist $\mathbb{E}[X] = 1$ und $\mathbb{P}[X \geq 2] = \frac{1}{2} > \exp(1 - 2)$.

2.MC4 [2 Punkte] Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. Welche der folgenden Grenzen gilt als $n \to \infty$?

(A) $\mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_n \geq 1.65\sqrt{n}\sigma] \longrightarrow 0.05$

(B) $\mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_n \geq 1.96\sqrt{n}\sigma] \longrightarrow 0.05$

(C) $\mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_n \geq 1.65n^2\sigma] \longrightarrow 0.05$

(D) $\mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_n \geq 1.96n^2\sigma] \longrightarrow 0.05$

Lösung:

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\boxed{\mathbb{P}[X_1 + \cdots + X_n \geq 1.65\sqrt{n}\sigma]} = \mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}\sigma} \geq 1.65\right] \longrightarrow 1 - \Phi(1.65) \approx 0.05.$$

2.MC5 [1 Punkt] Sei $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in (0,\infty)}$ eine Modellfamilie, so dass unter $\mathbb{P}_\theta$, $X_1, X_2, \ldots > 0$ i.i.d. Zufallsvariablen sind mit $\mathbb{E}_\theta[X_1] = \frac{1}{\theta}$. Betrachten Sie die Folge von Schätzern (T_n), definiert durch $T_n = n(X_1 + \cdots + X_n)^{-1}$. Welche der folgenden Aussagen gilt für (T_n)?

(A) (T_n) ist konsistent, aber nicht unbedingt erwartungstreu.

(B) (T_n) ist erwartungstreu, aber nicht unbedingt konsistent.

(C) (T_n) ist konsistent und erwartungstreu.

(D) Im Allgemeinen muss (T_n) weder konsistent noch erwartungstreu sein.

Lösung:

(T_n) ist $\boxed{\text{konsistent, aber nicht unbedingt erwartungstreu.}}$ Nach dem starken Gesetz der grossen Zahlen gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \theta$$

$\mathbb{P}_\theta$-fast sicher als $n \to \infty$. Somit gilt $T_n \to \infty$ $\mathbb{P}_\theta$ fast sicher als $n \to \infty$, so dass (T_n) ist eine konsistente Folge von Schätzern. Allerdings ist T_n im Allgemeinen nicht erwartungstreu.

Nach der Jensen-Ungleichung gilt, dass

$$\mathbb{E}_\theta[T_n] \geq \frac{n}{\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]} = \theta$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ konstant sind.

2.MC6 [2 Punkte] Sei X eine einzelne Beobachtung der Verteilung $\mathcal{N}(\theta, 1)$, wobei θ unbekannt ist. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Welche der folgenden Mengen ist ein sinnvoller Verwerfungsbereich für X?

(A) $K = (1/2, \infty)$

(B) $K = (2, \infty)$

(C) $K = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

(D) $K = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Lösung:

$K = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ und $K = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ sind nicht sinnvoll, da es wahrscheinlicher ist, dass X unter H_0 negative Werte annimmt als unter H_1. $K = (1/2, \infty)$ ist auch kein guter Verwerfungsbereich, weil es gilt

$$\mathbb{P}_{H_0}[X > 1/2] = 1 - \Phi(1/2) \approx 0.31,$$

sodass das Testniveau (31%) zu hoch ist, um ein statistisch signifikantes Ergebnis zu erhalten. Daher ist $\boxed{K = (2, \infty)}$ am besten, mit Niveau

$$\mathbb{P}_{H_0}[X > 2] = 1 - \Phi(2) \approx 0.02.$$

Aufgabe 3

Seien $U \sim \mathcal{U}[0,2]$ und $B \sim \mathrm{Ber}(p)$ unabhängige Zufallsvariablen.

3.MC1 [2 Punkte] Was ist $\mathbb{E}[U^4]$?

(A) 1/5 (B) 4 (C) 16/5 (D) 32/5

Lösung:

$$\mathbb{E}[U^4] = \int_0^2 \frac{u^4}{2} du = \left[\frac{u^5}{10}\right]_0^2 = \boxed{\frac{16}{5}}.$$

3.MC2 [2 Punkte] Was ist $\mathrm{Var}(B+U)$?

(A) $(p(1-p)+1/3)^2$

(B) $(p(1-p)+4/3)^2$

(C) $p(1-p)+1/3$

(D) $p(1-p)+4/3$

Lösung:

Da B und U unabhängig sind, gilt

$$\mathrm{Var}(B+U) = \mathrm{Var}(B) + \mathrm{Var}(U) = \boxed{p(1-p)+1/3}.$$

Betrachten Sie jetzt die Zufallsvariable

$$Z = U^{B+1} = \begin{cases} U, & \text{falls } B = 0, \\ U^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.MC3 [2 Punkte] Was ist der Erwartungswert von Z?

(A) $4/3 - p/3$

(B) $(4/3)^{p+1}$

(C) 1

(D) $1 + p/3$

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= (1-p)\mathbb{E}[Z \mid B=0] + p\mathbb{E}[Z \mid B=1] \\ &= (1-p)\mathbb{E}[U] + p\mathbb{E}[U^2] = 1 - p + \frac{4p}{3} = \boxed{1 + \frac{p}{3}}. \end{aligned}$$

3.MC4 [2 Punkte] Was ist die Verteilungsfunktion von Z?

(A)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \big((1-p)x + p\sqrt{x}\big)/2 & \text{für } 0 \le x < 2, \\ 1 - p + p\sqrt{x}/2 & \text{für } 2 \le x < 4, \\ 1 & \text{für } x \ge 4. \end{cases}$$

(B)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \big((1-p)x + p\sqrt{2x}\big)/2 & \text{für } 0 \le x < 2, \\ 1 & \text{für } x \ge 2. \end{cases}$$

(C)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \big(8(1-p)x + px^2\big)/16 & \text{für } 0 \le x < 2, \\ 1 - p + px^2/16 & \text{für } 2 \le x < 4, \\ 1 & \text{für } x \ge 4. \end{cases}$$

(D)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \big(2(1-p)x + px^2\big)/4 & \text{für } 0 \le x < 2, \\ 1 & \text{für } x \ge 2. \end{cases}$$

Lösung:

Da U Werte in $[0,2]$ annimmt und U^2 Werte in $[0,4]$ annimmt, nimmt Z Werte in $[0,4]$ an. Für $x \in [0,2)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \le x] &= \mathbb{P}[B=0]\mathbb{P}[U \le x] + \mathbb{P}[B=1]\mathbb{P}[U^2 \le x] \\ &= (1-p)\mathbb{P}[U \le x] + p\mathbb{P}[U \le \sqrt{x}] \\ &= (1-p)F_U(x) + pF_U(\sqrt{x}) = \frac{(1-p)x + p\sqrt{x}}{2}. \end{aligned}$$

Für $x \in [2,4)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \le x] &= \mathbb{P}[B=0]\mathbb{P}[U \le x] + \mathbb{P}[B=1]\mathbb{P}[U^2 \le x] \\ &= (1-p)\cdot 1 + pF_U(\sqrt{x}) = 1 - p + \frac{p\sqrt{x}}{2}, \end{aligned}$$

so dass

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \big((1-p)x + p\sqrt{x}\big)/2 & \text{für } 0 \le x < 2, \\ 1 - p + p\sqrt{x}/2 & \text{für } 2 \le x < 4, \\ 1 & \text{für } x \ge 4. \end{cases}}$$

Aufgabe 4

Ein Forscherteam hat im Wald eine Insektenfalle aufgestellt, um die Insektenpopulation täglich zu überwachen. An diesem Ort ist etwa die Hälfte der Tage warm und die andere Hälfte kalt. Ausserdem besteht an kalten Tagen eine Regenwahrscheinlichkeit von 40% und an warmen Tagen 20%. Abhängig vom Wetter hat die Anzahl der an einem Tag gefangenen Insekten die Verteilung Poi(λ), wobei λ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

λ	Kalt	Warm
Regnerisch	1	2
Sonnig	3	10

4.A1 [2 Punkte] Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Insekten gefangen werden, wenn der Tag kalt und regnerisch ist?

Lösung:

Sei I die Anzahl der Insekten und definiere die Ereignisse $K =$„kalt“, $W =$„warm“, $R =$„regnerisch“und $S =$„sonnig“. Abhängig von K und R hat die Anzahl der Insekten die Verteilung Poi(1), also

$$\mathbb{P}[I \geq 3 \mid K, R] = 1 - \mathbb{P}[I \leq 2 \mid K, R] = 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \boxed{1 - \frac{5}{2e}}.$$

4.A2 [2 Punkte] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag keine Insekten gefangen werden?

Lösung:

Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[I = 0] &= \mathbb{P}[K \cap R]\mathbb{P}[I = 0 \mid K, R] + \mathbb{P}[K \cap S]\mathbb{P}[I = 0 \mid K, S] \\ &\quad + \mathbb{P}[W \cap R]\mathbb{P}[I = 0 \mid W, R] + \mathbb{P}[W \cap S]\mathbb{P}[I = 0 \mid W, S] \\ &= \boxed{0.2e^{-1} + 0.3e^{-3} + 0.1e^{-2} + 0.4e^{-10}}.\end{aligned}$$

4.A3 [2 Punkte] Was ist die erwartete Anzahl gefangener Insekten pro Tag?

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I] &= \mathbb{P}[K \cap R]\mathbb{E}[I \mid K, R] + \mathbb{P}[K \cap S]\mathbb{E}[I \mid K, S] \\ &\quad + \mathbb{P}[W \cap R]\mathbb{E}[I \mid W, R] + \mathbb{P}[W \cap S]\mathbb{E}[I \mid W, S] \\ &= 0.2 \cdot 1 + 0.3 \cdot 3 + 0.1 \cdot 2 + 0.4 \cdot 10 = \boxed{5.3}.\end{aligned}$$

4.A4 [2 Punkte] Bei der Betrachtung früherer Aufzeichnungen stellten die Forscher fest, dass am selben Tag im vergangenen Jahr keine Insekten gefangen wurden. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Tag warm und sonnig war?

Lösung:

Nach dem Satz von Bayes und 4.2, gilt

$$\mathbb{P}[W \cap S \mid I = 0] = \frac{\mathbb{P}[W \cap S]\mathbb{P}[I = 0 \mid W, S]}{\mathbb{P}[I = 0]} = \boxed{\frac{0.4e^{-10}}{0.2e^{-1} + 0.3e^{-3} + 0.1e^{-2} + 0.4e^{-10}}}$$

$$= \frac{4e^{-10}}{2e^{-1} + 3e^{-3} + 1e^{-2} + 4e^{-10}}.$$

Aufgabe 5

Seien $T \sim \mathcal{U}[1,2]$, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\gamma)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\lambda, \gamma > 0$.

5.A1 [1 Punkt] Was ist die gemeinsame Dichte $f_{T,X,Y}$ von (T, X, Y)? (Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.)

Lösung:

$$f_{T,X,Y}(t,x,y) = \begin{cases} \lambda\gamma \exp(-\lambda x - \gamma y), & 1 \leq t \leq 2, x, y \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.A2 [2 Punkte] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\min(X, Y)$.

Lösung:

Für $z \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\min(X,Y) > z] = \mathbb{P}[X > z, Y > z] &= \mathbb{P}[X > z]\mathbb{P}[Y > z] \\ &= \Big(1 - F_X(z)\Big)\Big(1 - F_Y(z)\Big) = e^{-(\lambda+\gamma)z}, \end{aligned}$$

so dass

$$\boxed{F_{\min(X,Y)}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda+\gamma)z}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}}$$

d.h. $\min(X,Y) \sim \text{Exp}(\lambda + \gamma)$.

Raul wartet an einer Bushaltestelle. Es gibt zwei verschiedene Busse, die ihn zu seinem Ziel bringen und in $Z_1 = TX$ bzw. $Z_2 = TY$ Minuten ankommen, wobei die Zufallsvariable T das Verkehrsaufkommen in der Nähe darstellt.

5.A3 [1 Punkt] Was sind die Erwartungswerten von Z_1 und Z_2?

Lösung:

Da T, X und Y unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X] = \boxed{\frac{3}{2\lambda}}, \quad \mathbb{E}[Z_2] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[Y] = \boxed{\frac{3}{2\gamma}}.$$

5.A4 [2 Punkte] Berechnen Sie die Kovarianz von Z_1 und Z_2. Sind Z_1 und Z_2 unabhängig?

Lösung:

$$\mathbb{E}[Z_1 Z_2] = \mathbb{E}[T^2 XY] = \mathbb{E}[T^2]\,\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \frac{1}{\lambda\gamma} = \frac{7}{3\lambda\gamma},$$

so dass

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - \mathbb{E}[Z_1]\mathbb{E}[Z_2] = \frac{7}{3\lambda\gamma} - \frac{9}{4\lambda\gamma} = \boxed{\frac{1}{12\lambda\gamma}}.$$

Da $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) \neq 0$, sind Z_1 und Z_2 $\boxed{\text{nicht unabhängig.}}$

5.A5 [2 Punkte] Was ist die erwartete Zeit, die Raul auf die Ankunft eines Busses warten muss?

Lösung:

Raul muss warten $\min(Z_1, Z_2) = T \min(X, Y)$. Da T, X und Y unabhängig sind, sind T und $\min(X, Y)$ unabhängig. Nach 5.2) gilt $\min(X, Y) \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \gamma)$, so dass

$$\mathbb{E}[\min(Z_1, Z_2)] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[\min(X, Y)] = \boxed{\frac{3}{2(\lambda + \gamma)}}.$$

Aufgabe 6

Laura wirft Pfeile auf eine Dartscheibe, die durch $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ dargestellt wird. Sei $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ eine Modellfamilie, so dass die Verteilung des Landeplatzes (X,Y) gegeben ist durch

$$f_\theta(x,y) = c_\theta(x^2+y^2)^{\theta/2}, \quad (x,y) \in D,$$

wobei $c_\theta > 0$ eine Konstante ist.

6.A1 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\theta > -2$ und $c_\theta = \frac{\theta+2}{2\pi}$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta[(X,Y) \in D] &= \iint_D f_\theta(x,y)dxdy = \iint_D c_\theta(x^2+y^2)^{\theta/2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 c_\theta r^\theta r dr d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 c_\theta r^{\theta+1}dr = \begin{cases} \frac{2\pi c_\theta}{\theta+2}, & \theta > -2, \\ \infty, & \theta \leq -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}_\theta[(X,Y) \in D] = 1$ gelten muss, erhalten wir $\theta > -2$ und $c_\theta = \frac{\theta+2}{2\pi}$.

6.A2 [1 Punkt] Laura spielt n Runden und trifft die Punkte $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n) \in D$. Wenn man davon ausgeht, dass die Punkte unabhängige Beobachtungen der Verteilung von (X,Y) sind, was ist die Likelihoodfunktion für θ? (Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.)

Lösung:

$$\boxed{L(\theta) = \frac{(\theta+2)^n}{(2\pi)^n}\Big(\prod_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\Big)^{\theta/2}}.$$

6.A3 [3 Punkte] Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ.

Hinweis: Sie sollen auch zeigen, dass Ihre Kandidatenlösung tatsächlich der Maximierer ist.

Lösung:

Die log-Likelihoodfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} l(\theta) = \log L(\theta) &= n\log(\theta+2) - n\log(2\pi) + \frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^n \log(x_j^2+y_j^2) \\ &= n\log(\theta+2) - n\log(2\pi) + \theta\sum_{j=1}^n \log r_j, \end{aligned}$$

wobei $r_j = (x_j^2+y_j^2)^{1/2}$. Durch Differenzieren erhalten wir den kritischen Punkt

$$l'(\hat\theta) = \frac{n}{\hat\theta+2} + \sum_{j=1}^n \log(r_j) = 0 \iff \hat\theta = -2 + \frac{n}{-\sum_{j=1}^n \log r_j}.$$

Da es für alle $\theta > -2$ gilt

$$l''(\theta) = -\frac{n}{(\theta+2)^2} < 0,$$

es folgt daraus, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer ist

$$T_{ML} = -2 + \frac{n}{-\sum_{j=1}^n \log R_j} = \boxed{-2 + \frac{2n}{-\sum_{j=1}^n \log(X_j^2 + Y_j^2)}}.$$

6.A4 [3 Punkte] Bestimmen Sie ein approximatives Konfidenzintervall für T_{ML} mit Niveau 95%.

Hinweis: Sie können benutzen, dass $-\log R \sim \mathrm{Exp}(\theta+2)$, wobei $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Lösung:

Da $-\log R_j \sim \mathrm{Exp}(\theta+2)$ gilt es $\mathbb{E}[-\log R_j] = \frac{1}{\theta+2}$ und $\mathrm{Var}(-\log R_j) = \frac{1}{(\theta+2)^2}$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt also für grosse n

$$\mathbb{P}_\theta\left[-1.96 \le \frac{-\sum_{j=1}^n \log R_j - \frac{n}{\theta+2}}{\frac{\sqrt{n}}{\theta+2}} \le 1.96\right] \approx 0.95.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\theta\left[\sqrt{n} - 1.96 \le \frac{-(\theta+2)\sum_{j=1}^n \log R_j}{n} \le \sqrt{n} + 1.96\right] \approx 0.95 \\
\iff &\mathbb{P}_\theta\left[1 - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \le \frac{\theta+2}{T_{ML}+2} \le 1 + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right] \approx 0.95 \\
\iff &\mathbb{P}_\theta\left[T_{ML} - \frac{1.96(T_{ML}+2)}{\sqrt{n}} \le \theta \le T_{ML} + \frac{1.96(T_{ML}+2)}{\sqrt{n}}\right] \approx 0.95.
\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
&\boxed{\left[T_{ML} - \frac{1.96(T_{ML}+2)}{\sqrt{n}}, T_{ML} + \frac{1.96(T_{ML}+2)}{\sqrt{n}}\right]} \\
&= \left[-2 + \frac{n - 1.96\sqrt{n}}{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \log(X_j^2+Y_j^2)}, -2 + \frac{n + 1.96\sqrt{n}}{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \log(X_j^2+Y_j^2)}\right]
\end{aligned}$$

ein approximatives Konfidenzintervall für θ mit Niveau 95%.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}[Z \leq 0.12] = 0.5478$.