Aufgaben und Lösungsvorschlag

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 diskret ist mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 3] = \frac{1}{2}.$$

1.MC1 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von X_1?

(A) 4
(B) 2
(C) 0
(D) 1

Lösung:

Der Erwartungswert ist 1:

$$\mathbb{E}[X_1] = -1 \cdot \mathbb{P}[X_1 = -1] + 3 \cdot \mathbb{P}[X_1 = 3] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

1.MC2 [1 Punkt] Was ist die Varianz von X_1?

(A) 1
(B) 4
(C) 2
(D) 5

Lösung:

Die Varianz ist 4:

$$\sigma^2_{X_1} = \mathbb{E}\left[(X_1 - 1)^2\right] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2)^2 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von S_n?

(A) $4n$
(B) $2n$
(C) $n/2$
(D) n

Lösung:

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind identisch verteilt. Die Linearität des Erwartungswerts impliziert

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

1.MC4 [1 Punkt] Was ist die Varianz von S_n?

(A) $4n^2$

(B) $16n^2$

(C) $2n$

(D) $4n$

Lösung:

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind identisch verteilt. Somit folgt (Satz 4.25)

$$\sigma_{S_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} 4 = 4n.$$

1.MC5 [1 Punkt] Was ist der fast sichere Grenzwert von

$$\frac{S_n}{n}$$

für $n \to \infty$?

(A) ∞

(B) 2

(C) 0

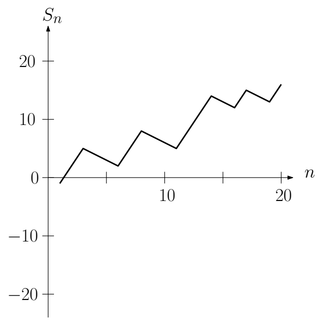
(D) 1

Lösung:

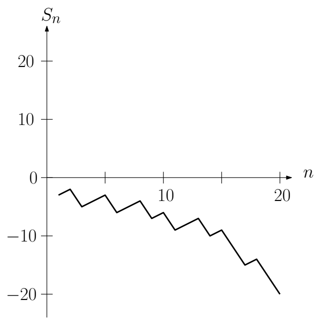
Aus der ersten Frage ist $\mathbb{E}[X_1] = 1$ bekannt. Aus dem Gesetz der grossen Zahlen folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] = 1 \quad \text{fast sicher.}$$

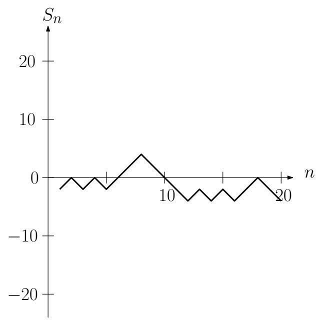
1.MC6 [1 Punkt] Wir haben die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ simuliert und die Partialsummen S_n für $n = 1, \dots, 20$ graphisch dargestellt. Welche der folgenden Darstellungen haben wir erhalten?



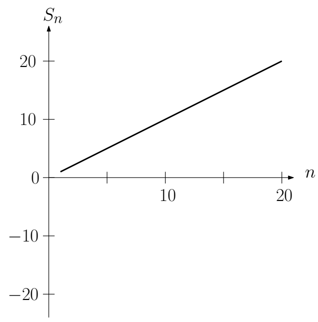
(A)



(B)



(C)



(D)

Lösung:

Die zufällige Irrfahrt S_n hat positiven Drift $+1$. Ausserdem nehmen $X_1, \dots, X_{20}$ Werte in $\{-1, 3\}$ an, also macht die Partialsumme S_n nur Schritte der Grösse $-1, 3$.

2.MC1 [1 Punkt] Sei $\Omega = \{0, 1\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. In welchem Fall ist die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$?

(A) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0, 1\}] = 1$

(B) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = 0$, $\mathbb{P}[\{1\}] = 0$ und $\mathbb{P}[\{0, 1\}] = 1$

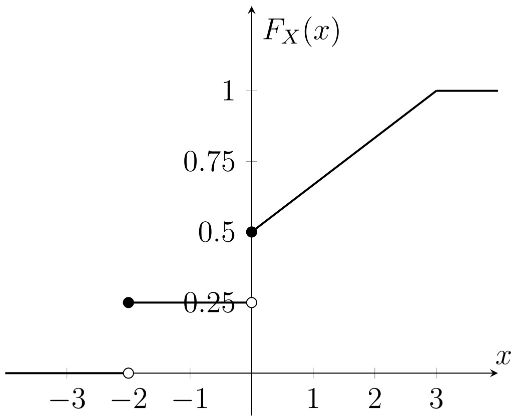
(C) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0, 1\}] = 1$

(D) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0, 1\}] = \frac{2}{3}$

Lösung:

$\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0, 1\}] = 1$

2.MC2 [1 Punkt] Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X. Welche Aussage ist korrekt?



(A) Die Zufallsvariable X ist sowohl stetig als auch diskret.

(B) Die Zufallsvariable X ist stetig.

(C) Die Zufallsvariable X ist diskret.

(D) Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret.

Lösung:

Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret.

2.MC3 [1 Punkt] Seien X, Y und Z drei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f. Welche Aussage ist korrekt?

(A) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$

(B) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x, y, z)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yz \cdot f(x, y, z)\, dy\, dz$

(C) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 yz \cdot f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$

(D) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + yz) \cdot f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$

Lösung:

$\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + yz) \cdot f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$

2.MC4 [1 Punkt] Sei $\Theta = [0, 1]$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$. Welche Alternativhypothese ist **nicht** möglich?

(A) $H_A : \theta \in [1/3, 2/3]$

(B) $H_A : \theta \in (1/3, 2/3)$

(C) $H_A : \theta \in [1/5, 4/5]$

(D) $H_A : \theta = 1/2$

Lösung:

Die Alternativhypothese $H_A : \theta \in [1/5, 4/5]$ ist nicht möglich, da H_0 und H_A in diesem Fall nicht disjunkt sind.

3.MC1 [2 Punkte] Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. In welchem Fall ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω?

(A) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

(B) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

(C) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

(D) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

Lösung:

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\{1, 2, 3, 4\}\}$

3.MC2 [2 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X = 0] = 1/5$, $\mathbb{P}[X = 1] = 2/5$, $\mathbb{P}[X = 2] = 0$ und $\mathbb{P}[X = 3] = 2/5$. Was ist die Verteilungsfunktion F_X?

(A)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{für } x < 0, \\ 2/5 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 2/5 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

(B)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{für } x = 0, \\ 2/5 & \text{für } x = 1, \\ 2/5 & \text{für } x = 3, \\ 0 & \text{für } x \notin \{0, 1, 3\}. \end{cases}$$

(C)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1/5 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 3/5 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

(D)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ (x+1)/5 & \text{für } -1 \leq x \leq 4, \\ 1 & \text{für } x > 4. \end{cases}$$

Lösung:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1/5 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 3/5 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

3.MC3 [2 Punkte] Seien X und Y zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 = 2$. Was ist die Varianz der Zufallsvariable $Z := 1 + X - Y - Y$?

(A) 7

(B) 6

(C) 10

(D) 11

Lösung:

Es gilt $Z = 1 + X - 2Y$. Wegen der Unabhängigkeit folgt $\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_X^2 + (-2)^2\sigma_Y^2 = 0 + 2 + 4 \times 2 = 10$.

3.MC4 [2 Punkte] Sei $\Theta = [0, 1]$ und seien $X_1, \ldots, X_6$ unabhängig, identisch verteilt unter $\mathbb{P}_\theta$ mit $X_i \sim \mathrm{Ber}(\theta)$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1/2$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1/3$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art für den Test (T, K) mit

$$T = \sum_{i=1}^{6} X_i \quad \text{und} \quad K = (-\infty, 0]\ ?$$

(A) $1 - (1/2)^6$

(B) $1 - (2/3)^6$

(C) $(1/2)^6$

(D) $(2/3)^6$

Lösung:

$\mathbb{P}_{1/2}[T \leq 0] = (1/2)^6 = 1/64$

3.MC5 [2 Punkte] Sei $\Theta = \mathbb{N}$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, sodass $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(\theta, 1/3)$. Welcher der folgenden Schätzer ist **nicht** erwartungstreu?

(A) $T_3 = X_1 + X_2 + X_3$

(B) $T_1 = X_1$

(C) $T_4 = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

(D) $T_2 = 3X_1$

Lösung:

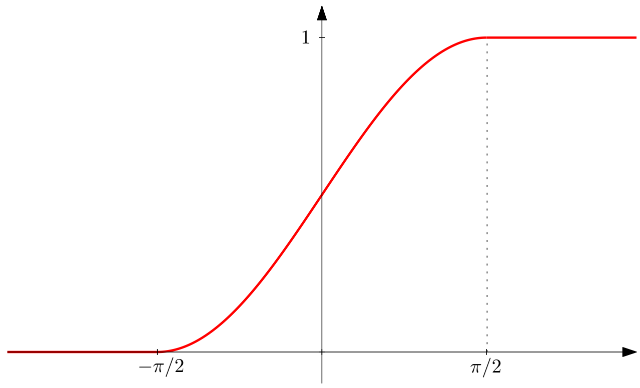
Der Schätzer $T_1 = X_1$ hat Erwartungswert $\theta/3$ und somit nicht erwartungstreu.

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < -\pi/2, \\ \frac{1+\sin(a)}{2}, & \text{falls } a \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 1, & \text{falls } a > \pi/2. \end{cases}$$

4.F1 [**1 Punkt**] Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

Lösung:



4.F2 [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass X eine stetige Zufallsvariable ist und berechnen Sie die Dichte von X.

Lösung:

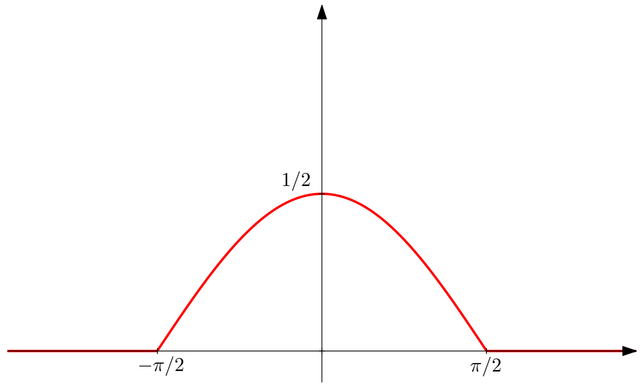
Die Verteilungsfunktion F_X ist stetig und stückweise $\mathcal{C}^1$. Aus Theorem 3.26 folgt somit, dass X eine stetige Zufallsvariable ist und man die Dichte f_X auf den Intervallen $(-\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ und $(\pi/2, \infty)$ durch Ableiten erhält:

$$f_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < -\pi/2, \\ \frac{\cos(a)}{2}, & \text{falls } a \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0, & \text{falls } a > \pi/2. \end{cases}$$

Alternative Lösung: Berechnung der Dichte und X stetig, da $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(a)dx$.

4.F3 [**1 Punkt**] Skizzieren Sie die Dichte von X.

Lösung:



4.F4 [4 Punkte] Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} a f_X(a)da = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos(a)da \\ &= \frac{1}{2}[a\sin(a)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(a)da \\ &= \frac{1}{2}[a\sin(a)]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}[\cos(a)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0\end{aligned}$$

Alternativ erhät man das Resultat $\mathbb{E}[X] = 0$ ohne Berechnung, indem man feststellt, dass die Funktion $a\cos(a)$ ungerade ist.

Varianz:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos(a)da \\ &= \frac{1}{2}[a^2\sin(a)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\sin(a)da \\ &= (\frac{\pi}{2})^2 + [a\cos(a)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(a)da \\ &= (\frac{\pi}{2})^2 - [\sin(a)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = (\frac{\pi}{2})^2 - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}\end{aligned}$$

4.F5 [2 Punkte] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = e^{-\pi}] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[0 \leq X \leq \pi/4].$$

Lösung:

Da X stetig ist, folgt

$$\mathbb{P}[X = e^{-\pi}] = 0.$$

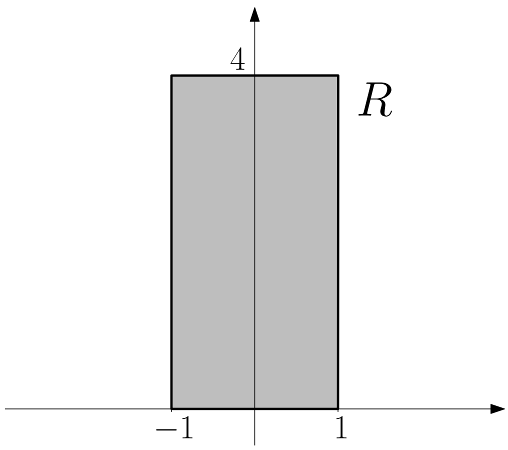
Durch Berechnung erhält man

$$\mathbb{P}[0 \leq X \leq \pi/4] = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(a)}{2} da = \frac{1}{2} \left[\sin(a)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sin(\pi/4)}{2} \left(= \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

Alternativ:

$$\mathbb{P}[0 \leq X \leq \pi/4] = \mathbb{P}[0 < X \leq \pi/4] = F_X(\pi/4) - F_X(0) = \frac{\sin(\pi/4)}{2} \left(= \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

Wir betrachten das Quadrat $R = [-1,1] \times [0,4]$:



Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{8} \cdot \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,4]} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{falls } (x,y) \in R, \\ 0 & \text{falls } (x,y) \notin R. \end{cases}$$

5.F1 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

Lösung:

Randdichte von X: Per Definition folgt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8} \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \mathbb{1}_{y \in [0,4]} dy = \int_0^4 \frac{1}{8} \cdot \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} dy = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{x \in [-1,1]}. \end{aligned}$$

Randdichte von Y: Per Definition folgt

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8} \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \mathbb{1}_{y \in [0,4]} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{8} \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,4]} dx = \frac{1}{4} \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,4]}$$

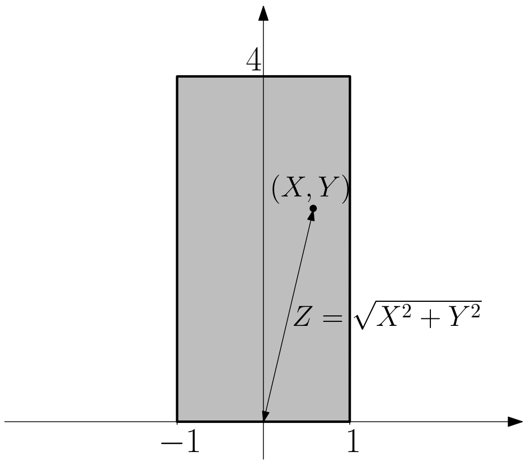
5.F2 [1 Punkt] Sind X und Y unabhängig?

Lösung:

Nach Theorem 5.11 sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig, da gilt

$$f(x,y) = \frac{1}{8} \mathbb{1}_{(x,y) \in R} = \frac{1}{8} \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \mathbb{1}_{y \in [0,4]} = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

5.F3 [4 Punkte] Wir betrachten die Zufallsvariable $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Diese repräsentiert die Euklidische Distanz des zufälligen Punkts (X, Y) vom Ursprung $(0,0)$.



Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z^2]$ und $\mathbb{E}[Z^2X^2]$.

Lösung:

Berechnung $\mathbb{E}[Z^2]$: Aus der Linearität des Erwartungswerts und den Randdichten aus Aufgabenteil (a) folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \mathbb{E}[X^2+Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 dx + \int_0^4 \frac{1}{4} y^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3}\end{aligned}$$

Berechnung $\mathbb{E}[Z^2X^2]$: Aus der Linearität des Erwartungswerts, den Randdichten aus Aufgabenteil (a) und der Unabhängigkeit aus Aufgabenteil (b) folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2X^2] &= \mathbb{E}[X^4 + X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^4] + \mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2] \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^4 dx + \frac{16}{9} = \frac{1}{5} + \frac{16}{9} \left(= \frac{89}{45}\right)\end{aligned}$$

5.F4 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$0 \leq \mathbb{E}[Z] \leq \sqrt{17/3}.$$

Lösung:

Da die Zufallsvariable Z nicht-negativ ist, also $Z \geq 0$ fast sicher, folgt direkt

$$\mathbb{E}[Z] \geq 0.$$

Mit der Jensen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\sqrt{X^2+Y^2}] &\leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2+Y^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[Z^2]} \\ &= \sqrt{\frac{17}{3}},\end{aligned}$$

wobei der Wert aus der vorherigen Teilaufgabe eingesetzt wurde.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\Theta = \mathbb{R}$. Wir wählen eine Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$, sodass die Zufallsvariablen $X_1, \dots X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 4).$$

Der Parameter θ ist unbekannt und soll im Folgenden geschätzt werden.
Erinnerung: Aus $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 4)$ unter $\mathbb{P}_\theta$ folgt, dass X_1 stetig ist mit Dichte

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x_1-\theta)^2}.$$

6.F1 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood Schätzer gegeben ist durch

$$T = T_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Lösung:

Die Likelihood Funktion und die log-Likelihood Funktion sind gegeben durch:

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \frac{1}{(8\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}.$$
$$\log L(x_1,\dots,x_n;\theta) = -\frac{n}{2}\log(8\pi) - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2.$$

Um das Maximum zu bestimmen, leiten wir die log-Likelihood Funktion nach θ ab:

$$\frac{d}{d\theta}\log L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta).$$

Es folgt, dass die log-Likelihood Funktion (und somit auch die Likelihood Funktion) ihr Maximum bei

$$\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

annimmt, da die Ableitung für $\theta < \theta^*$ strikt positiv, an der Stelle θ^* gleich null und für $\theta > \theta^*$ strikt negativ ist. Hieraus folgt

$$T_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

6.F2 [1 Punkt] Ist der Schätzer T_{ML} aus der vorherigen Teilaufgabe erwartungstreu?

Lösung:

Ja, der Schätzer T_{ML} ist erwartungstreu, da für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}_\theta[T_{ML}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}_\theta[X_i]}_{=\theta} = \theta,$$

wobei wir die Linearität des Erwartungswertes verwendet haben.

6.F3 [2 Punkte] Berechnen Sie den mittleren quadratischen Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_{ML}]$ für jedes $\theta \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Berechnung der Varianz von T_{ML} für jedes $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Var}_\theta[T_{ML}] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_\theta[\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \underbrace{\mathrm{Var}_\theta[X_i]}_{=4} = \frac{4}{n}$$

Da der Schätzer T_{ML} erwartungstreu ist, liefert die Zerlegung

$$\mathrm{MSE}_\theta[T_{ML}] = \mathrm{Var}_\theta[T_{ML}] + (\mathbb{E}_\theta[T_{ML}] - \theta)^2 = \frac{4}{n} + 0 = \frac{4}{n}.$$

6.F4 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sqrt{n}\cdot(T_{ML} - \theta)}{2} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{unter } \mathbb{P}_\theta.$$

Lösung:

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $T_{ML} = \frac{1}{n}X_1 + \ldots + \frac{1}{n}X_n$ als Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist mit Erwartungswert

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1] + \ldots \frac{1}{n}\mathbb{E}_\theta[X_n] = \theta$$

und Varianz

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_\theta[X_1] + \ldots + \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_\theta[X_n] = \frac{4}{n}.$$

[Erwartungswert und Varianz sind bereits aus vorherigen Teilaufgaben bekannt.]

Es gilt also $T_{ML} \sim \mathcal{N}(\theta, 4/n)$. Durch Standardisieren erhält man

$$\frac{\sqrt{n}\cdot(T_{ML} - \theta)}{2} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Alternativ: Die Formel aus der Vorlesung für die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen kann auch direkt auf den Ausdruck

$$-\frac{\sqrt{n}\cdot\theta}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}X_1 + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{n}}X_n$$

angewendet werden.

6.F5 [2 Punkte] Bestimmen Sie ein Konfidenzintervalll für θ mit Niveau 95%.

Hinweis: Für eine Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt

$$\mathbb{P}[-1.96 \leq Z \leq 1.96] \geq 0.95.$$

Lösung:

Aus der Tabelle erhalten wir, dass für eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Z gilt

$$\mathbb{P}_\theta[-1.96 \leq Z \leq 1.96] \geq 0.95.$$

Aus Aufgabenteil (d) folgt also

$$\begin{aligned} 0.95 &\leq \mathbb{P}_\theta\left[-1.96 \leq \frac{\sqrt{n}\cdot(T_{ML}-\theta)}{2} \leq 1.96\right] \\ &= \mathbb{P}_\theta\left[T_{ML} - \frac{3.92}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq T_{ML} + \frac{3.92}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Ein Konfidenzintervall für θ mit Niveau 95% ist also gegeben durch

$$I = \left[T_{ML} - \frac{3.92}{\sqrt{n}}, T_{ML} + \frac{3.92}{\sqrt{n}}\right].$$