Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

Lösung

---

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantworteter Frage 1 Punkt und pro falscher Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt (siehe Ende dieser Klausur).**

a) Seien C und D Ereignisse mit $P[C] > 0$, $P[D] > 0$. Wir nehmen an, dass $P[C|D] > P[C]$. Dann gilt:

1. $P[C] = P[D]$.
2. $P[D|C] > P[D]$.
3. $P[C|D] = P[D|C]$.

Lösung:

2. ist die richtige Antwort, denn mit dem Satz von Bayes wissen wir:

$$P[D|C] = \frac{P[C|D] \cdot P[D]}{P[C]} \underbrace{>}_{P[C|D]>P[C]} \frac{P[C] \cdot P[D]}{P[C]} = P[D].$$

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben durch $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $P[\{k\}] = \frac{1}{4}$ für jedes $k \in \Omega$. Sei $A_k = \{k, 4\}$, für $k = 1, 2, 3$. Sind die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 unabhängig?

1. Ja, denn A_1, A_2 bzw. A_2, A_3 bzw. A_1, A_3 sind unabhängig und somit auch A_1, A_2 und A_3.
2. Nein.
3. Es fehlen Angaben, um dies beantworten zu können.

Lösung:

Siehe nächste Seite!

2. ist richtig, denn $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{4\}$ und $P[A_i] = \frac{1}{2}$ für $i = 1, 2, 3$. Somit haben wir

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[A_1] \cdot P[A_2] \cdot P[A_3].$$

c) Sei $X \sim Bin(n, \frac{1}{4})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ferner nehmen wir an, dass $E[X] = 1$. Wie gross ist $P[X \leq 1]$?

1. $P[X \leq 1] = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{7}{4}$.
2. $P[X \leq 1] = \left(\frac{3}{4}\right)^3$.
3. $P[X \leq 1] = 4\left(\frac{1}{4}\right)^4$.

Lösung:

1 ist richtig.

$$E[X] = 1 = \frac{n}{4} \Rightarrow n = 4.$$

und

$$\begin{aligned} P[X \leq 1] &= P[X = 0] + P[X = 1] \\ &= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1 + \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

d) Sei $X \sim Geom(p)$ und $Var[X] = \frac{1}{4}$. Berechne p.

1. $p = -2 + 2\sqrt{2}$ oder $p = -2 - 2\sqrt{2}$.
2. $p = -2 + 2\sqrt{2}$.
3. $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lösung:

2. ist richtig. Die Varianz einer $Geom(p)$ verteilten Zufallsvariable X ist $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$. Da die Varianz bekannt ist, lösen wir die Gleichung $\frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{4}$ nach p auf. Wir erhalten:

$$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

Zusätlich muss $0 \leq p \leq 1$ gelten, also ist $p = -2 + 2\sqrt{2}$.

e) Für welche stetige Verteilung gilt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$?

1. Die Gleichverteilung erfüllt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$.
2. Die Poissonverteilung erfüllt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$.
3. Die Exponentialverteilung erfüllt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$.

Siehe nächste Seite!

Lösung:

3. ist richtig, denn es gilt für $X \sim Exp(\lambda)$:

$$\begin{aligned} P[X > t+s | X > s] &= \frac{P[X > t+s]}{P[X > s]} = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\ &= 1 - F_X(t) = P[X > t]. \end{aligned}$$

f) Sei $(X_k)_k$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{für } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne den (P-f.s.) Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Der Grenzwert ist:

1. $\frac{1}{2}$.
2. ∞.
3. $\frac{7}{3}$.

Lösung:

3 ist richtig

$$E[X_k] = \frac{1}{6} \int_0^2 x dx + \frac{1}{3} \int_2^4 x dx = \frac{7}{3}.$$

Nach dem starken Gesetz der grossen Zahl gilt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = E[X_1] = \frac{7}{3}.$$

g) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\,x\,e^{x(1-x)-y} & \text{für } 0 \leq x \leq y\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Dichte f_X der Randverteilung von X. Die Dichte ist:

1. $f_X(x) = 2\,x\,e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Siehe nächste Seite!

2. $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

3. $f_X(x) = \begin{cases} 2\,x\,e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung:

3. ist richtig. Für $x \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int\limits_x^\infty 2\,x\,e^{x(1-x)-y}\,dy \\ &= 2\,x\,e^{x(1-x)} \int\limits_x^\infty e^{-y}\,dy \\ &= 2\,x\,e^{x(1-x)}(-e^{-y}\big|_x^\infty) \\ &= 2\,x\,e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also $f_X(x) = \begin{cases} 2\,x\,e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

h) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $E[XY]$. Es gilt:

1. $E[XY] = 3$.
2. $E[XY] = 2$.
3. $E[XY] = 1$.

Lösung:

3. ist richtig. Wir rechnen

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^2 \underbrace{\int_0^y \frac{1}{2}xy\;dx}_{=\frac{1}{4}x^2y\big|_0^y=\frac{1}{4}y^3}\,dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4}y^3\;dy = \frac{1}{16}y^4\big|_0^2 = 1. \end{aligned}$$

Siehe nächste Seite!

i) Wenn das Signifikanzniveau α eines Tests kleiner wird, dann

1. wird der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese H_0 grösser.
2. wird die Macht des Tests grösser.
3. wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art grösser.

Lösung:

3. ist die richtige Anwort. Wird das Signifikanzniveau α kleiner, so muss die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kleiner werden, d.h. der Verwerfungsbereich muss kleiner gewählt werden. Somit wird die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art grösser und die Macht des Tests kleiner.

j) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_ϑ i.i.d. $\sim$ Poisson(λ) mit $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

1. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ lautet $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
2. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ lautet $\sum_{i=1}^n X_i$.
3. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ lautet $n\sum_{i=1}^n X_i$.

Lösung:

1. ist richtig. Die log-Likelihood-Funktion für die Poissonverteilung lautet

$$\begin{aligned}
\log L(k_1, \ldots, k_n; \lambda) &= \log\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \log\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\right) \\
&= -n\lambda + \log(\lambda)\sum_{i=1}^n k_i - \sum_{i=1}^n \log(k_i!).
\end{aligned}$$

Die Ableitung nach λ ist

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(k_1, \ldots, k_n; \lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n k_i$$

und diese ist 0 für

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k_i.$$

Also ist der ML-Schätzer für λ gleich $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Siehe nächste Seite!

2. **(10 Punkte)** Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde in jeder Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim Geom(p)$ mit $p = 0.05$.

a) **(1 Punkte)** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

Lösung:
Da $Y \sim Geom(p)$ gilt $P[Y > k] = (1-p)^k, k \in \mathbb{N}$. Somit gilt also

$$P[Y > 10] = (1 - 0.05)^{10} = 0.95^{10} \approx 59.9\%.$$

b) **(2 Punkte)** Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

Lösung:
Gesucht ist $P[Y > 30|Y > 20]$. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P[Y > 30 \mid Y > 20] &= \frac{P[Y > 30, Y > 20]}{P[Y > 20]} = \frac{P[Y > 30]}{P[Y > 20]} = \frac{(1-0.05)^{30}}{(1-0.05)^{20}} \\ &= (1-0.05)^{10} \\ &= 0.95^{10} \approx 59.9\%. \end{aligned}$$

c) **(5 Punkte)** Zeige, dass für eine diskrete Zufallsvariable Z mit Werten in $\mathbb{N}$ gilt

$$\exists q \in (0,1) : Z \sim Geom(q) \Longleftrightarrow P[Z > n] = P[Z > n + k|Z > k], \; n, k \geq 1.$$

Lösung:
"$\Longrightarrow$": Sei $Z \sim Geom(q), \; q \in [0,1]$. Dann gilt $P[Z > k] = (1-q)^k, k \in \mathbb{N}$, und somit für alle $k, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} P[Z > n + k \mid Z > k] &= \frac{P[Z > n + k, Z > k]}{P[Z > k]} = \frac{P[Z > n + k]}{P[Z > k]} \\ &= \frac{(1-q)^{n+k}}{(1-q)^k} = (1-q)^n = P[Z > n]. \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$": Sei nun $P[Z > n + k \mid Z > k] = P[Z > n], \; n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$P[Z > n] = P[Z > n + k \mid Z > k] = \frac{P[Z > n + k, Z > k]}{P[Z > k]} = \frac{P[Z > n + k]}{P[Z > k]}.$$

Siehe nächste Seite!

Definiere nun $f(n) = P[Z > n]$. Es gilt also

$$f(n)f(k) = f(n+k), \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $f(n+1) = f(n)f(1)$ folgt sofort durch Iteration, dass $f(n) = a^n$ mit $a = f(1)$ und damit

$$\begin{aligned} P[Z = n] &= P[Z > n-1] - P[Z > n] \\ &= f(n-1) - f(n) \\ &= (1-a)a^{n-1}. \end{aligned}$$

Schliesslich ist $a = f(1) = P[Z > 1] \in [0,1]$, also auch $q = 1 - a \in [0,1]$ und damit $Z \sim Geom(q)$.

d) (2 Punkte) Diese Sonde sende nun jede Minute bis zum Ausfall ein Datenpaket an die Empfangsstation, wobei wir annehmen, dass jedes Paket unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% empfangen wird. Nehmen wir an, dass die Sonde nach 30 Minuten ausfällt. Wie gross ist dann die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass während dieser Zeit mehr als 27 Datenpakete erhalten werden?

Lösung:
Die Lebensdauer der Sonde sei also 30 Minuten. Während dieser Zeit sendet sie jede Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ein Datenpaket. In jeder Minute haben wir ein Bernoulli-Experiment, d.h. die Empfangsstation empfängt das Datenpaket oder nicht. Sei Z die Anzahl der empfangenen Datenpakete. Die bedingte Verteilung von Z, gegeben $Y = 30$, ist demnach eine $Bin(n = 30, p = 0.9)$-Verteilung und gesucht ist $P[Z > 27 \mid Y = 30]$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P[Z > 27 \mid Y = 30] &= P[Z = 28 \mid Y = 30] + P[Z = 29 \mid Y = 30] \\ &\quad + P[Z = 30 \mid Y = 30] \\ &= \binom{30}{28} p^{28}(1-p)^2 + \binom{30}{29} p^{29}(1-p) + \binom{30}{30} p^{30} \\ &\approx 0.411. \end{aligned}$$

3. (10 Punkte) Man wählt zufällig einen Punkt $A = (X, Y)$ in dem Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{1}{2} \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$. Daraus folgt, dass die gemeinsame Dichte von (X, Y) folgende Form besitzt:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1, \\ c, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \leq |y| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Sei $V = (2\max\{|X|, |Y|\})^2$ die Fläche des achsenparallelen Quadrates, welches seinen Mittelpunkt im Ursprung $O = (0, 0)$ hat und bei welchem der Punkt A auf einer der Seitenkanten liegt. Sei weiter ϱ der Abstand vom Punkt A zum Punkt $B = (2, 0)$.

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Konstante c. Bestimmen Sie die Dichte von X und die Dichte von Y.

Lösung:
Es muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \int\int f_{X,Y}(x, y)dxdy \\ &= c\int\int 1_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}} dxdy + c\int\int 1_{\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leq |y| \leq 1\}} dxdy \\ &= 2c + c \;=\; 3c. \end{aligned}$$

Somit gilt $c = 1/3$. Für die Dichte von X gilt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x, y)dy \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 1_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} dy + \frac{1}{3}\int_{-1}^{-1/2} 1_{\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}} dy + \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1} 1_{\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}} dy \\ &= \frac{2}{3} 1_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} + \frac{1}{3} 1_{\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}}. \end{aligned}$$

Aus Symmetrie gilt $f_Y(y) = f_X(y) = \frac{2}{3} 1_{\{\frac{1}{2} \leq |y| \leq 1\}} + \frac{1}{3} 1_{\{-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}}$.

b) (3 Punkte) Finden Sie $E[X^2]$ und $E[\varrho^2]$.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int x^2 f_X(x)dx \\
&= \frac{2}{3}\int x^2 1_{\{\frac{1}{2}\le|x|\le 1\}}dx + \frac{1}{3}\int x^2 1_{\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\}}dx \\
&= \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^2 dx + \frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^2 dx \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{1-1/8}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1/8}{3}\right) \\
&= \frac{28}{72} + \frac{2}{72} \;=\; \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\varrho^2 = (X-2)^2 + Y^2 = X^2 - 4X + 4 + Y^2$. Somit ist, aus Symmetrie gilt $E[X^2] = E[Y^2]$,

$$E[\varrho^2] \;=\; E[X^2] + E[Y^2] + 4 \;=\; 2E[X^2] + 4 \;=\; \frac{5}{6} + 4 \;=\; \frac{29}{6},$$

da nach dem Hinweis gilt $E[X] = 0$.

c) **(3 Punkte)** Berechnen Sie die Dichte von V. Berechnen Sie $E[V]$.

Lösung:
Die Seitenlänge des Quadrates ist $S = 2\max\{|X|,|Y|\}$. Die Fläche des Quadrates ist daher mindestens 1 und maximal 4. Somit ist $f_V(v) = 0$ für $v \le 1$ und $v \ge 4$. Sei $v \in [1,4]$. Es ist $V \le v$ genau dann, wenn $S \le \sqrt{v}$ gilt. Es gilt daher, da $\sqrt{v}/2 \in [1/2, 1]$,

$$\begin{aligned}
P[V \le v] &= P[\max\{|X|,|Y|\} \le \sqrt{v}/2] \\
&= P[|X| \le \sqrt{v}/2,\, |Y| \le \sqrt{v}/2] \\
&= \frac{1}{3}\int_{|y|\le 1}\int_{1/2\le|x|\le 1} 1_{\{|x|\le\sqrt{v}/2,\,|y|\le\sqrt{v}/2\}}dxdy \\
&\qquad + \frac{1}{3}\int_{|x|<1/2}\int_{1/2\le|y|\le 1} 1_{\{|x|\le\sqrt{v}/2,\,|y|\le\sqrt{v}/2\}}dydx \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{v}\left(\sqrt{v}-1\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{v}-1\right) \;=\; \frac{1}{3}\left(v-1\right).
\end{aligned}$$

Somit ist $f_V(v) = 1/3$ für $v \in [1,4]$.

Für $E[V]$ gilt daher

$$E[V] \;=\; \frac{1}{3}\int_1^4 v dv \;=\; \frac{1}{3}\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^4 \;=\; \frac{5}{2}.$$

4. (10 Punkte) Wir haben eine Münze mit einer Seite rot und der anderen Seite blau gefärbt, und wir vermuten, dass die Münze gezinkt ist und eher auf der blauen Seite landet. Also machen wir ein Experiment, in dem wir die Münze 10 Mal werfen, und wir beobachten jeweils, ob sie auf blau landet. Gehen Sie davon aus, dass alle Würfe unabhängig voneinander sind. Sei $X_i = 1$, wenn der i-te Wurf auf blau landet, und sonst gleich 0.

Wurf i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1

a) (9 Punkte) Führen Sie einen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ durch, um festzustellen, ob die Münze gezinkt ist.

Geben Sie folgendes an:

1. das Modell,
2. die Nullhypothese,
3. die Alternativhypothese,
4. die Teststatistik,
5. die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese,
6. den Verwerfungsbereich,
7. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
8. den Testentscheid.

Lösung:

Modell: Unter P_p sind die X_i, i.i.d., $\sim \text{Ber}(p)$, $i = 1, ..., 10$, p unbekannt.

Nullhypothese H_0**:** $p = p_0 = 0.5$.

Alternativhypothese H_A**:** $p = p_A > p_0$.

Teststatistik: $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$, denn

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_{10}; \lambda_0, \lambda_A) &= \frac{L(x_1, \ldots, x_{10}; \lambda_0)}{L(x_1, \ldots, x_{10}; \lambda_A)} \\ &= \frac{p_0^T (1 - p_0)^{10-T}}{p_A^T (1 - p_A)^{10-T}} \\ &= \left(\frac{p_0(1 - p_A)}{p_A(1 - p_0)} \right)^T \left(\frac{1 - p_0}{1 - p_A} \right)^{10} \end{aligned}$$

Da $\left(\frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)}\right) < 1$ wird $R(x_1, \ldots, x_{10}; p_0, p_A)$ klein, genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{10} x_i$ gross ist. Wir wählen als Teststatistik also

$$T = \sum_{i=1}^{10} X_i.$$

Siehe nächste Seite!

Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim \text{Bin}(10, 1/2)$.

Verwerfungsbereich: Der kritische Bereich "Quotient klein" hat die äquivalente Form "Summe gross", also ist der Verwerfungsbereich von der Form $K = (k, \infty)$. Um das Signifikanzniveau einzuhalten, muss gelten

$$P_{p_0}[T \in K] = P_{p_0}[T > k] \leq 1\% \Leftrightarrow P_{p_0}[T \leq k] \geq 99\%.$$

k	$P_{p_0}[T \leq k]$
0	0.001
1	0.011
2	0.055
3	0.172
4	0.377
5	0.623
6	0.828
7	0.945
8	0.989
9	0.999
10	1.000

Deshalb haben wir als Verwerfungsbereich= $(9, \infty)$.

Beobachteter Wert der Teststatistik: $t = T(\omega) = 8$.

Testentscheid: Da 8 nicht im Verwerfungsbereich liegt, wird die Nullhypothese **nicht** verworfen.

b) **(1 Punkt)**Wie hoch ist das kleinste Niveau, bei welchem die Nullhypothese verworfen wird (dies ist der so genannte P-Wert)?

Solution:

Wir rechnen, dass $P_{H_0}[T \geq 8] = (1 - P[T < 8]) = 1 - 0.945 = 0.055$ gilt.