Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

Nachname	**Vorname**	**Legi-Nummer**	**Prüfungsnr.**
jeweils die ersten zwei Buchstaben		*letzte sechs Ziffern*	*Nicht ausfüllen*

Tragen Sie **jetzt die ersten zwei Initialen Ihres Nachnamens und Vornamens ein**, ebenso wie die **letzten sechs Ziffern Ihrer Legi-Nummer**. Wenn Sie separate Blätter beifügen, schreiben Sie diese, und **nur diese Informationen deutlich oben auf jedes Blatt**.

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			10
4			10

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

Siehe nächste Seite!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: 10 DIN A4-Blätter (beidseitig beschrieben erlaubt). Kein Taschenrechner!

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden.

Siehe nächste Seite!

Aufgaben

---

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantworteter Frage 1 Punkt und pro falscher Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt (siehe Ende dieser Klausur).**

a) Seien C und D Ereignisse mit $P[C] > 0$, $P[D] > 0$. Wir nehmen an, dass $P[C|D] > P[C]$. Dann gilt:

1. $P[C] = P[D]$.
2. $P[D|C] > P[D]$.
3. $P[C|D] = P[D|C]$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben durch $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $P[\{k\}] = \frac{1}{4}$ für jedes $k \in \Omega$. Sei $A_k = \{k, 4\}$, für $k = 1, 2, 3$. Sind die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 unabhängig?

1. Ja, denn A_1, A_2 bzw. A_2, A_3 bzw. A_1, A_3 sind unabhängig und somit auch A_1, A_2 und A_3.
2. Nein.
3. Es fehlen Angaben, um dies beantworten zu können.

c) Sei $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{4})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ferner nehmen wir an, dass $E[X] = 1$. Wie gross ist $P[X \leq 1]$?

1. $P[X \leq 1] = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{7}{4}$.
2. $P[X \leq 1] = \left(\frac{3}{4}\right)^3$.
3. $P[X \leq 1] = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^4$.

d) Sei $X \sim \text{Geom}(p)$ und $\text{Var}[X] = \frac{1}{4}$. Berechne p. Es gilt:

1. $p = -2 + 2\sqrt{2}$ oder $p = -2 - 2\sqrt{2}$.
2. $p = -2 + 2\sqrt{2}$.
3. $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Für welche stetige Verteilung gilt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$?

1. Die Gleichverteilung erfüllt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$.
2. Die Poissonverteilung erfüllt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$.
3. Die Exponentialverteilung erfüllt $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$.

Siehe nächste Seite!

f) Sei $(X_k)_k$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{für } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne den (P-f.s.) Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Der Grenzwert ist:

1. $\frac{1}{2}$.
2. ∞.
3. $\frac{7}{3}$.

g) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\,x\,e^{x(1-x)-y} & \text{für } 0 \leq x \leq y\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Dichte f_X der Randverteilung von X. Die Dichte ist:

1. $f_X(x) = 2\,x\,e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
3. $f_X(x) = \begin{cases} 2\,x\,e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

h) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $E[XY]$. Es gilt:

1. $E[XY] = 3$.
2. $E[XY] = 2$.
3. $E[XY] = 1$.

Siehe nächste Seite!

i) Wenn das Signifikanzniveau α eines Tests kleiner wird, dann

1. wird der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese H_0 grösser.
2. wird die Macht des Tests grösser.
3. wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art grösser.

j) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_ϑ i.i.d. $\sim$ Poisson(λ) mit $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

1. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ lautet $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ lautet $\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ lautet $n\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Siehe nächste Seite!

2. (10 Punkte) Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde in jeder Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \text{Geom}(p)$ mit $p = 0.05$.

a) (1 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

b) (2 Punkte) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

c) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für eine diskrete Zufallsvariable Z mit Werten in $\mathbb{N}$ gilt

$$\exists q \in (0,1) : Z \sim \text{Geom}(q) \iff P[Z > n] = P[Z > n + k | Z > k], \ \forall n, k \geq 1.$$

d) (2 Punkte) Diese Sonde sende nun jede Minute bis zum Ausfall ein Datenpaket an die Empfangsstation, wobei wir annehmen, dass jedes Paket unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% empfangen wird. Nehmen wir an, dass die Sonde nach 30 Minuten ausfällt. Wie gross ist dann die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass während dieser Zeit mehr als 27 Datenpakete erhalten werden?

Siehe nächste Seite!

3. **(10 Punkte)** Man wählt zufällig uniform verteilt einen Punkt $A = (X, Y)$ in dem Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$, siehe Abbildung 1. Daraus folgt, dass die gemeinsame Dichte von (X, Y) folgende Form besitzt:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1, \\ c, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \leq |y| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

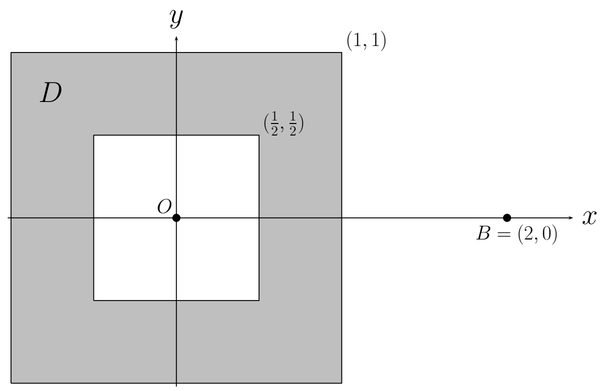

Abbildung 1: Der Punkt A wird zufällig in dem grauen Gebiet D gewählt.

Sei $V = (2 \max\{|X|, |Y|\})^2$ die Fläche des achsenparallelen Quadrates, welches seinen Mittelpunkt im Ursprung $O = (0, 0)$ hat und bei welchem der Punkt A auf einer der Seitenkanten liegt. Sei weiter ϱ der Abstand vom Punkt A zum Punkt $B = (2, 0)$.

a) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die Konstante c. Bestimmen Sie die Dichte von X und die Dichte von Y.

b) **(3 Punkte)** Finden Sie $E[X^2]$ und $E[\varrho^2]$.

c) **(3 Punkte)** Berechnen Sie die Dichte von V. Berechnen Sie $E[V]$.

Siehe nächste Seite!

4. **(10 Punkte)** Wir haben eine Münze mit einer Seite rot und der anderen Seite blau gefärbt, und wir vermuten, dass die Münze gezinkt ist und eher auf der blauen Seite landet. Also machen wir ein Experiment, in dem wir die Münze 10 Mal werfen, und wir beobachten jeweils, ob sie auf blau landet. Gehen Sie davon aus, dass alle Würfe unabhängig voneinander sind. Sei $X_i = 1$, wenn der i-te Wurf auf blau landet, und sonst gleich 0.
Wir haben die folgenden Ergebnisse erhalten:

Wurf i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1

Die Verteilungsfunktion der gegebenen Binomialverteilung in Tabelle 1 kann als Hilfsmittel verwendet werden.

a) **(9 Punkte)** Führen Sie einen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ durch, um festzustellen, ob die Münze gezinkt ist.

Geben Sie folgendes an:

1. das Modell,
2. die Nullhypothese,
3. die Alternativhypothese,
4. die Teststatistik,

   Hinweis: Betrachten Sie den Likelihood-Quotienten.

   $$R(x_1, \ldots, x_n, \vartheta_0, \vartheta_A) := \frac{L(x_1, \ldots, x_n, \vartheta_0)}{L(x_1, \ldots, x_n, \vartheta_A)},$$

   wo $L(x_1, \ldots, x_n, \vartheta) = P_\vartheta[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$.
5. die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese,
6. den Verwerfungsbereich,
7. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
8. den Testentscheid.

b) **(1 Punkte)** Wie hoch ist das kleinste Niveau, bei welchem die Nullhypothese verworfen wird (dies ist der so genannte P-Wert)?

Tabelle 1: Verteilungsfunktion für $X \sim \text{Bin}(k|p, n)$ mit $n = 10$ und $p = 0.5$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_p[X \leq k]$	0.001	0.011	0.055	0.172	0.377	0.623	0.828	0.945	0.989	0.999	1.000

Viel Erfolg!

Siehe nächste Seite!

Antwortblatt Aufgabe 1

Nachname	**Vorname**	**Legi-Nummer**	**Prüfungsnr.**
jeweils die ersten zwei Buchstaben		*letzte sechs Ziffern*	*Nicht ausfüllen*

	Antw. 1	Antw. 2	Antw. 3	k. A.
1a)				
1b)				
1c)				
1d)				
1e)				
1f)				
1g)				
1h)				
1i)				
1j)				

Das folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe 1	Korr.	Kontr.
richtig		
falsch		
k. A.		
Punkte		