Lösungen: Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00S

Prof. Dr. Josef Teichmann

1. (a) Antwort 3. ist korrekt:

$P[A \cap B] > 0$ impliziert $P[A] > 0$ und $P[B] > 0$, also

$$P[A \cap B] = P[A|B]\, P[B] = P[B|A]\, P[A].$$

Dann

$$P[A|B] > P[A] \Rightarrow P[A \cap B] > P[A]\, P[B] \Rightarrow P[B|A] > P[B].$$

(b) Antwort 1. ist korrekt:

$P[X > Y,\, X > Z] = 2/3! = 1/3$, und $P[X > Z] = 1/2$, so dass

$$P[X > Y \,|\, X > Z] = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

(c) Antwort 2. ist korrekt:

$$E[Y] = E[X + Y] - E[X] = 3 - 1 = 2.$$

(d) Antwort 2. ist korrekt:

$$P[X_n = k] = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}.$$

Nun gilt, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ und $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} \to 1$ wenn $n \to \infty$, und $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k} \to\ 1$, da

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k},$$

und

$$\frac{(n-k+1)^k}{n^k} \leq \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \frac{n^k}{n^k},$$

wobei der linke und rechte Ausdruck jeweils Grenzwert 1 haben. Schliesslich,

$$\lim_{n\to\infty} P[X_n =\ k] = \frac{1}{k!}\, e^{-1},$$

und $X \sim Poi(1)$ verteilt ist.

(e) Antwort 3. ist korrekt.

Wir nehmen an, dass $Y \sim Exp(p)$. Dann gilt

$$P[Y > s + t \,|\, Y > t] = \frac{e^{-p(s+t)}}{e^{-pt}} = e^{-ps} = P[Y > s].$$

(f) Antwort 2. ist korrekt:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dz\, \mathbb{1}_{\,x^2+y^2\le 1} = \frac{3}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\,z^2\le 1-x^2-y^2}\,dz\,\mathbb{1}_{\,x^2+y^2\le 1} \\ &= 2\,\frac{3}{4\pi}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\,z\le\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dz\,\mathbb{1}_{\,x^2+y^2\le 1} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathbb{1}_{\,x^2+y^2\le 1}. \end{aligned}$$

(g) Antwort 2. ist korrekt:

$$\begin{aligned} E[f(X^2+Y^2)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x^2+y^2)\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty f(r^2)e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr = \int_0^\infty f(z)\,\frac{1}{2}\,e^{-\frac{z}{2}}\,dz \end{aligned}$$

also ist $g(z) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{z}{2}}$ die Dichte von X^2+Y^2 auf $\mathbb{R}_+$ und $X^2+Y^2 \sim Exp(\frac{1}{2})$.

(h) Antwort 2. ist korrekt:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}_n)^2\right] &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n E[X_i^2] - 2\sum_{i=1}^n E[X_i\,\overline{X}_n] + \sum_{i=1}^n E\left[\overline{X}_n^2\right]\right] \\ &= \frac{n}{n-1}E[X_1^2] - \frac{2n}{n-1}E[X_1\,\overline{X}_n] + \frac{n}{n-1}E\left[\overline{X}_n^2\right]. \end{aligned}$$

Man hat,

$$E\left[\overline{X}_n^2\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\,E[X_i\,\overline{X}_n] = E[X_i\,\overline{X}_n]$$

und $E[X_i\,\overline{X}_n] = \frac{1}{n}E[X_1^2]$ (da $X_1, ..., X_n$ i.i.d), somit

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}_n)^2\right] &= \frac{n}{n-1}E[X_1^2] - \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{n}E[X_1^2] + \frac{n-1}{n}\,(E[X_1])^2\right] \\ &= E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = v. \end{aligned}$$

Der Schätzer ist also erwartungstreu für v.

(i) Antwort 2. ist korrekt.

(j) Antwort 1. ist korrekt:

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p_X(x_i;\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i},$$

deshalb

$$\log L(x_1, ..., x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log\theta + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log(1-\theta),$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-\theta} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Das ist 0 für

$$(1-\theta) \sum_{i=1}^{n} x_i = \theta \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

i.e. für $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2. (a) Wir erinnern uns an die Verteilungsfunktion für eine Zufallsvariable $Y \sim Exp(\lambda)$: $P(Y \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, für $x \geq 0$. Also

$$P[Y > 10] = 1 - P[Y \leq 10] = e^{-\lambda\, 10} = (e^{-\lambda})^{10} = (e^{\log(0.95)})^{10} = 0.95^{10}.$$

(b) Weil Y gedächtnislos ist :

$$P[Y > 20 + 10 \,|\, Y > 20] = P[Y > 10] = 0.95^{10}$$

wie in (a).

(c) $\Rightarrow$: Wir nehmen an, dass $Y \sim Exp(p)$. Dann

$$P[Y > s + t \,|\, Y > t] = \frac{e^{-p(s+t)}}{e^{-pt}} = e^{-ps} = P[Y > s].$$

$\Leftarrow$: Wir nehmen an, dass Y gedächtnislos ist. Dann, für $s, t \geq 0$

$$P[Y > s] = P[Y > s + t \,|\, Y > t] = \frac{P[Y > s + t, Y > t]}{P[Y > t]} = \frac{P[Y > s + t]}{P[Y > t]}$$

so

$$P[Y > s + t] = P[Y > s]\, P[Y > t].$$

Sei $g(s) := P[Y > s]$, dann

$$g(s + t) = g(s)\, g(t). \tag{1}$$

g ist stetig und monoton auf $\mathbb{R}_+$, so g ist differenzierbar auf $\mathbb{R}_+$, und, für $\delta > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(s + \delta + h) - g(s + \delta)}{h} \overset{(1)}{=} g(s) \lim_{h\to 0} \frac{g(\delta + h) - g(\delta)}{h} = g(s)\, c_\delta,$$

mit $c_\delta < 0$, weil g strikt antiton ist. Wir nützen (1) noch einmal und haben

$$g'(s + \delta) = g(s)\, c_\delta = g(s + \delta)\, \frac{c_\delta}{g(\delta)},$$

das zusammen mit $g(0) = 1$ bringt

$$g(s + \delta) = e^{\frac{c_\delta}{g(\delta)}\,(s+\delta)} = e^{-\lambda\,(s+\delta)}, \quad \lambda > 0,$$

so dass (nehmen $\delta \to 0$) Y kann nur Exponentialverteilung haben.

(d)

$$P[Z>Y] = \iint_{\{(y,z)\in\mathbb{R}^2: z>y\}} \lambda\, e^{-\lambda\, y}\, \mu\, e^{-\mu\, z}\, dz\, dy$$
$$= \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\, y} \int_y^\infty \mu\, e^{-\mu\, z}\, dz\, dy = \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\, y}\, e^{-\mu\, y}\, dy = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

3. (a) Sei $m \in \mathbb{R}$.

$$P[M \le m] \overset{(unab.)}{=} P[U_1 \le m, U_2 \le m, U_3 \le m] \overset{(i.d.)}{=} \prod_{i=1}^{3} P[U_i \le m]$$
$$= (P[U_1 \le m])^3 = \begin{cases} 0 & \text{if } m < 0 \\ m^3 & \text{if } 0 \le m < 1 \\ 1 & \text{if } m \ge 1 \end{cases}$$

So $f_M(m) = 3m^2\, \mathbb{1}_{[0,1]}(m)$.

(b)

$$P[M < m, L \le l] = P[M < m] - P[M < m, L > l]$$
$$= m^3 - P[l < U_1 < m, l < U_2 < m, l < U_3 < m]$$
$$= m^3 - (P[l < U_1 < m])^3 = m^3 - (m-l)^3 \quad \text{für } 0 \le l \le m \le 1$$

So $f_{M,L}(m, L) = 6(m-l)\, \mathbb{1}_{\{0\le l\le m\le 1\}}$.

(c)

$$f_{L|M}(l, m) = \frac{f_{M,L}(m,L)}{f_M(m)} = \frac{6(m-l)}{3m^2}\, \mathbb{1}_{\{0\le l\le m\le 1\}} = 2\frac{m-l}{m^2}\, \mathbb{1}_{\{0\le l\le m\le 1\}}$$

4. (a)
i. $X_i \overset{i.i.d}{\sim} Bernoulli(p)$, p unbekannt.
ii. H_0: $p = p_0 = 1/6$
iii. H_0: $p > 1/6$
iv. $T := \sum_{i=1}^{n} X_i$
v. $T \sim Bin(10, 1/6)$
vi. Wir möchten $P_{p_0}[H_0 \text{ verwerfen}] \le 0.01$. Wir verwerfen H_0 wenn T gross ist, so wir möchten $k \in 0, 1, ..., 9$, so dass

$$P_{p_0}[T > k] \le 0.01$$
$$\iff P_{p_0}[T \le k] > 0.99$$

Man sieht auf die Tabelle dass $k = 5$, so der Verwerfungsbereich ist $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.
vii. $T(x1, ..., x_{10}) = \sum_{i=1}^{10} x_i = 4$.
viii. $4 < 6$ so wir können H_0 nicht verwerfen.

(b)

$$P_{p_0}[T \ge 4] = 1 - P_{p_0}[T < 4] = 1 - 0.930 = 0.07$$