D–ITET

Prüfung Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

401-0604-00L

Prüfungsangabe

Bitte noch nicht umblättern!

1. Multiple choice **[7 Punkte]**

(a) **[1 Punkt]** Gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$? (Alle Antworten sind so zu verstehen, dass nur Zufallsvariablen X, Y betrachtet werden, deren Erwartungswert existiert und endlich ist.)

i. Ja, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ gilt für alle Zufallsvariablen X, Y.
ii. $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ gilt für alle unabhängigen Zufallsvariablen X, Y. Es gibt nicht unabhängige Zufallsvariablen für die $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \in \mathbb{R}$ gilt.
iii. Nein, es gibt unabhängige sowie nicht unabhängige Zufallsvariablen für die $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \in \mathbb{R}$ gilt.
iv. Nein, für alle Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(b) **[1 Punkt]** Was bedeutet es, wenn ein statistischer Test ein Signifikanz-Niveau (relevance level) α hat?

i. Die Nullhypothese H_0 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von α falsch, wenn der Test die Nullhypotehse verwirft.
ii. Wenn die Nullhypothese H_0 wahr wäre, dann würde mit der Wahrscheinlichkeit von α die Nullhypothese vom Test verworfen werden.
iii. Die Alternativhypothese H_1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von α falsch, wenn der Test die Nullhypotehse verwirft.
iv. Wenn die Alternativhypothese H_1 wahr wäre, dann würde mit der Wahrscheinlichkeit von α die Nullhypothese vom Test verworfen werden.

(c) **[2.5 Punkte]** Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Bernoulli Zufallsvariablen, wobei X_t eine Erfolgswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_t = 1] = 1 - e^{-\frac{1}{2^t}}$ hat. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemals ein Erfolg erzielt wird?

i. 0
ii. e^{-4}
iii. 2^{-e}
iv. e^{-1}
v. $1 - e^{-\frac{1}{2}}$
vi. $\log(2)$
vii. 1
viii. ∞

(d) **[2.5 Punkte]** Sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ eine Folge von i.i.d. Messungen einer unbekannten Größe m. Die Verteilung einer Messung ist $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (weil wir annehmen, dass der Messfehler $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ verteilt ist) mit bekanntem $\sigma = 0.1$. Wir betrachten das Konfidenzintervall $I = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - a, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + a]$. Wähle das grösste z sodass I ein z%-Konfidenzintervall ist.

i. $100\left(2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{n}\sigma}\right) - 1\right)$
ii. $100\left(2\Phi\left(\frac{\sigma a}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)$
iii. $100\left(2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right) - 1\right)$
iv. $100\left(2\Phi\left(a\sqrt{n}\sigma\right) - 1\right)$

2. Arbeitsweg **[8 Punkte]**

Frau Huber fährt jeden Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ mit dem Velo und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ mit dem Bus zur Arbeit. Nimmt sie das Velo, so ist ihre (zufällige) Fahrzeit in Minuten gleichverteilt auf $[1, 3]$; nimmt sie den Bus, so ist sie gleichverteilt auf $[2, 6]$. Wir bezeichnen die Fahrzeit von Frau Huber in Minuten mit T.

(a) [**3 Punkte**] Gegeben, dass T zwischen 2 und 5 liegt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Frau Huber dann mit dem Velo gefahren?

(b) [**1 Punkt**] Gegeben, dass T höchstens 1.5 beträgt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Frau Huber dann mit dem Bus gefahren?

(c) [**4 Punkte**] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von T.

3. T und U **[7 Punkte]**

Seien T und U zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei T exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda = 2$ (somit ist die Dichte $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$) und U gleichverteilt ist auf dem Intervall $[0, 2]$. Wir definieren $X := 2T - \frac{1}{2}U - 3$.

(a) [**3 Punkte**] Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(b) [**4 Punkte**] Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{X \leq -3\}$?

4. Einkommen in Zürich **[5 Punkte]**

Die Zufallsvariable X gibt das Einkommen eines zufällig ausgewählten Einwohners Zürich an. Zur Modellierung von X können wir eine sogenannte verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit Dichte

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}(1+x)^{-(1+\frac{1}{\theta})}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

verwenden. Dabei ist $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter, der auf der Basis von Daten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ (die das Einkommen von n zufällig ausgewählten Einwohnern angeben) geschätzt werden soll; diese Daten werden wie üblich als Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ aufgefasst, die unter $\mathbb{P}_\theta$ i.i.d. mit Dichte $f_X(x;\theta)$ sind, für jede Wahl des Parameters θ.

(a) Sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

Hinweis 4.1: Erinnere dich, dass $\arg\max_{\theta\in\mathbb{R}_{>0}} h\left(g(\theta)\right) = \arg\max_{\theta\in\mathbb{R}_{>0}} g(\theta)$ für jede streng monoton steigende Funktion h, wie zum Beispiel log.

5. Rote und schwarze Kugeln **[3 Punkte]**

Wir betrachten eine Urne mit 20 roten und 80 schwarzen Kugeln. Wir ziehen 3 Mal mit zurücklegen (nach jedem Zug wird die gezogene Kugel zurück in die Urne gelegt und die Kugeln gemischt bevor erneut gezogen wird).

(a) [**2 Punkte**] Definiere den einfachsten (kleinsten) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der dieses Experiment beschreibt, wobei wir nur an den Farben der Kugeln interessiert sind und in welcher Reihenfolge die Farben gezogen werden.

(b) [**0.5 Punkte**] Wie viele Elemente hat Ω?

(c) [**0.5 Punkte**] Wie viele Elemente hat $\mathcal{F}$?