Aufgaben und Lösungsvorschlag

Für jede der Subfragen von 1. und 2. ist genau eine Antwortmöglichkeit richtig.

1. Multiple choice [8 Punkte]

1.1. **[2 Punkte]** Seien A, B, C drei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] = 0.6$, $\mathbb{P}[B] = 0.4$, $\mathbb{P}[C] = 0.3$ und $\mathbb{P}[B \cap C] = 0.1$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) $\mathbb{P}[A \cap (B \cup C)] \geq 0.2$.
(B) B und C sind unabhängig.
(C) $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$.
(D) $\mathbb{P}[A \cap B^c \cap C^c] \geq 0.2$.

Lösung:

(A) holds, since $\mathbb{P}[B \cup C] = \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[B \cap C] = 0.6$, so that

$$\mathbb{P}[A^c \cup (B \cup C)^c] \leq 0.4 + 0.4 = 0.8$$

and $\mathbb{P}[A \cap (B \cup C)] \geq 1 - 0.8 = 0.2$.
(B) does not hold, since $\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C] = 0.12 \neq 0.1 = \mathbb{P}[B \cap C]$.
(C) does not hold if e.g. $B \subseteq A$, since then $\mathbb{P}[A \cup B] = 0.6$.
(D) does not hold if e.g. $A = B \cup C$, since then

$$\mathbb{P}[A \cap (B^c \cap C^c)] = \mathbb{P}[A \cap (B \cup C)^c] = 0.$$

1.2. **[2 Punkte]** Sei X eine Zufallsvariable, die Werte in der Menge $\{0, 1, 3\}$ annimmt mit $\mathbb{E}[X] = 2$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) $\mathbb{P}[X = 0] \geq \frac{1}{3}$. (B) $\mathbb{P}[X = 1] \geq \frac{1}{2}$. (C) $\mathbb{P}[X = 0] \leq \frac{1}{6}$. (D) $\mathbb{P}[X = 3] \geq \frac{1}{2}$.

Lösung:

(A) does not hold if $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = 3] = \frac{1}{2}$.
(B) does not hold if $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{3}$ and $\mathbb{P}[X = 3] = \frac{2}{3}$.
(C) does not hold if $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{3}$ and $\mathbb{P}[X = 3] = \frac{2}{3}$.
(D) holds. Indeed, for any choice of $\mathbb{P}$ note that

$$2 = \mathbb{E}[X] = \mathbb{P}[X = 1] + 3\mathbb{P}[X = 3] \leq 1 - \mathbb{P}[X = 3] + 3\mathbb{P}[X = 3] = 1 + 2\mathbb{P}[X = 3].$$

Therefore $\mathbb{P}[X = 3] \geq \frac{1}{2}$.

1.3. **[2 Punkte]** Vier Spielerinnen nehmen an einem Turnier teil, wo jede gegen jede ein Match spielt. Die Gewinnerin erhält pro gewonnenem Spiel einen Punkt (und die Verliererin keinen), und beide Spielerinnen haben die gleiche Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Wer am Ende des Turniers die meisten Punkte hat gewinnt das Turnier, wobei bei gleicher Punktzahl per Zufall entschieden wird. Was ist die erwartete Nummer von Punkten der Gewinnerin des Turniers?

(A) 1.5 (B) 2.25 (C) 2.5 (D) 2.675

Lösung:

(C) Label the players $1, 2, 3$ and 4. The probability of player 1 winning all her matches is

$$\mathbb{P}\left[\text{player 1 wins all her matches}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

By symmetry, this probability is the same for each of the players $1, 2, 3$ and 4. Since two players cannot both win all their matches, we have that

$$\mathbb{P}\left[\text{a player wins all her matches}\right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

There must always be a player who scores at least 2 points, since there are a total of 6 matches played and only 4 players. Hence, if none of the players wins all her matches, the winner must score 2 points out of 3. Therefore, the probability that the winner scores 2 points is $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. If X is the number of points scored by the winner, then

$$\mathbb{E}\left[X\right] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

1.4. **[2 Punkte]** Sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ eine Folge von i.i.d. Messungen einer unbekannten Größe m. Die Verteilung einer Messung ist $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (weil wir annehmen, dass der Messfehler $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ verteilt ist) mit bekanntem $\sigma = 0.1$. Wir betrachten das 90%-Konfidenzintervall $I = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - a_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + a_n]$ für m mit $\mathbb{P}\left[m \in [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - a_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + a_n]\right] = 0.9$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) a_n ist monoton fallend in n.

(B) a_n ist monoton steigend in n.

(C) a_n muss im allgemeinen nicht monoton sein.

Lösung:

(A): Intuitiv ist es klar, dass mehr Daten zu weniger Unsicherheit führen, darum wird das Konfidenz-Intervall immer schmäler, je mehr Daten man beobachtet.

Alternativ kann man die richtige auch von der Formel aus dem Skript (Seite 68 Example 1) für das Koinzidenz-Intervall ableiten: Laut dem Skript ist $a_n = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$, wobei $2\Phi(c) - 1 = \frac{z}{100}$ (im Skript ist nur der Fall für $\sigma = 1$ und $z = 95$ angegeben). Hier sieht man direkt, dass a_n monoton fallend in n ist.

Die Formel für das Koinzidenz-Intervall kann folgendermassen hergeleitet werden: Wir verwenden die Kurzschreibweise $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

Aufgrund der „Properties of normal random variables“ auf Seite 50 des Skripts erhalten wir $\bar{Y}_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ und somit $Z := \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - m)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$\mathbb{P}\left[\bar{Y}_n - a \le m\right] = \mathbb{P}\left[\bar{Y}_n \le m + a\right] = \mathbb{P}\left[\bar{Y}_n - m \le a\right] = \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - m)}{\sigma} \le \frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right] = \mathbb{P}\left[Z \le \frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right)$ und somit $\mathbb{P}\left[\bar{Y}_n - a > m\right] = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right)$. Analog erhält man $\mathbb{P}\left[\bar{Y}_n + a \ge m\right] = \mathbb{P}\left[\bar{Y}_n \ge m - a\right] = \mathbb{P}\left[\bar{Y}_n - m \ge -a\right] = \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - m)}{\sigma} \ge \frac{-\sqrt{n}a}{\sigma}\right] = \mathbb{P}\left[Z \ge \frac{-\sqrt{n}a}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right) =$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right)$, wobei die letzten beiden Schritte wegen Stetigkeit beziehungsweise Symmetrie gelten. Somit gilt $\mathbb{P}\left[\bar{Y}_n + a < m\right] = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right)$.

$\mathbb{P}\left[m \in [\bar{Y}_n - a, \bar{Y}_n + a]\right] = \frac{z}{100}$ ist äquivalent zu $\frac{z}{100} = 1 - \mathbb{P}\left[m \notin [\bar{Y}_n - a, \bar{Y}_n + a]\right]$. Da die Ereignisse $\left\{\bar{Y}_n - a > m\right\}$ und $\left\{\bar{Y}_n + a < m\right\}$ disjunkt sind können wir die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung als Summe der Wahrscheinlichkeiten schreiben: $\frac{z}{100} = 1 - \mathbb{P}\left[\left\{\bar{Y}_n - a > m\right\} \cup \left\{\bar{Y}_n + a < m\right\}\right]$ $1 - \left(\mathbb{P}\left[\bar{Y}_n - a > m\right] + \mathbb{P}\left[\bar{Y}_n + a < m\right]\right) = 1 - 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}\right) - 1$.

2. Multiple-Choice: Verteilungsfunktion F_X **[6 Punkte]**

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } 0 \leq a < 2 \\ \frac{a}{4}, & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ \frac{5}{6}, & \text{falls } 3 \leq a < 6 \\ 1 - \frac{1}{10}e^{-(a-6)}, & \text{falls } a \geq 6. \end{cases}$$

2.1. [**0.5 Punkte**] $E_1 = \{X \leq 1\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_1?

(A) $\mathbb{P}[E_1] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{1}{6}$ (C) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{1}{3}$

2.2. [**0.5 Punkte**] $E_2 = \{X > 2\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_2?

(A) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{a}{4}$ (B) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{1}{2}$ (C) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{2}{3}$

2.3. [**0.5 Punkte**] $E_3 = \{2 \leq X < \frac{8}{3}\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_3?

(A) $\mathbb{P}[E_3] = \frac{a}{4}$ (B) $\mathbb{P}[E_3] = \frac{1}{3}$ (C) $\mathbb{P}[E_3] = \frac{2}{3}$

2.4. [**0.5 Punkte**] $E_4 = \{4 < X \leq 5\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_4?

(A) $\mathbb{P}[E_4] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_4] = \frac{5}{18}$ (C) $\mathbb{P}[E_4] = \frac{5}{6}$

2.5. [**0.5 Punkte**] $E_5 = \{X = 6\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_5?

(A) $\mathbb{P}[E_5] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_5] = \frac{1}{15}$ (C) $\mathbb{P}[E_5] = \frac{9}{10}$

2.6. [**1 Punkt**] Sind E_1 und E_2 unabhängig?

(A) Ja (B) Nein

2.7. [**1 Punkt**] Sind E_2 und E_3 unabhängig?

(A) Ja (B) Nein

2.8. [**1 Punkt**] Sind E_3 und E_4 unabhängig?

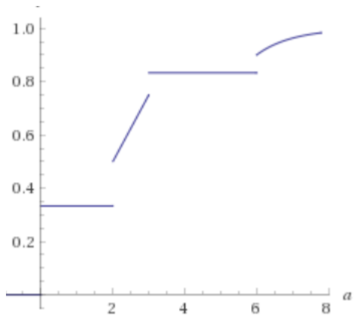
(A) Ja (B) Nein

2.9. [**0.5 Punkte**] Hat die Verteilung von X eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

(A) Ja (B) Nein

Lösung:

Der Graph von F_X sieht folgendermassen aus



2.1. $\mathbb{P}[E_1] = \mathbb{P}[\{X \leq 1\}] = F_X(1) = \frac{1}{3}$

2.2. $\mathbb{P}[E_2] = \mathbb{P}[\{X > 2\}] = 1 - \mathbb{P}[\{X \leq 2\}] = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2.3. $\mathbb{P}[E_3] = \mathbb{P}\left[\{2 \leq X < \frac{8}{3}\}\right] = F_X(\frac{8}{3}-) - F_X(2-) = \frac{8}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

2.4. $\mathbb{P}[E_4] = \mathbb{P}[\{4 < X \leq 5\}] = F_X(5) - F_X(4) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$

2.5. $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[\{X = 6\}] = F_X(6) - F_X(6-) = \frac{9}{10} - \frac{5}{6} = \frac{1}{15}$

2.6. Nein.

$$E_1 \cap E_2 = \{X \leq 1\} \cap \{X > 2\} = \varnothing.$$

$$\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 \neq \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \mathbb{P}[E_1]\,\mathbb{P}[E_2].$$

E_1 und E_2 sind nicht unabhängig.

2.7. Ja.

$$E_2 \cap E_3 = \{X > 2\} \cap \{2 \leq X < \frac{8}{3}\} = \{2 < X < \frac{8}{3}\}.$$

$$\mathbb{P}[E_2 \cap E_3] = \mathbb{P}\left[\{2 < X < \frac{8}{3}\}\right] = F_X(\frac{8}{3}-) - F_X(2) = \frac{8}{12} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathbb{P}[E_2]\,\mathbb{P}[E_3].$$

E_2 und E_3 sind unabhängig.

2.8. Ja.

$$E_3 \cap E_4 = \{2 \leq X < \frac{8}{3}\} \cap \{4 < X \leq 5\} = \varnothing.$$

$$\mathbb{P}[E_3 \cap E_4] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 = \frac{1}{3}0 = \mathbb{P}[E_3]\,\mathbb{P}[E_4].$$

E_3 und E_4 sind unabhängig.

2.9. Nein, diese Verteilung besitzt keine Wahrscheinlichkeitsdichte, weil F_X Sprungstellen hat.

3. Zufällige Potenz **[5 Punkte]**

Seien U und B zwei unabhängige Zufallsvariablen wobei U uniform verteilt ist auf $[0,1]$ und B hat eine Bernoulli Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$. Wir definieren die Zufallsvariable $Z = U^{1+2B}$.

3.1. **[2 Punkte]** Finde die Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte von Z.

3.2. **[2 Punkte]** Finde $\mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{E}[Z^2]$ und $\mathbb{E}[ZU]$.

3.3. **[1 Punkt]** Für welchen Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{E}[(Z-\lambda U)^2]$ minimal?

Lösung:

3.1.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}[Z \le z] = \mathbb{P}[U \le z, B = 0] + \mathbb{P}\left[U^3 \le z, B = 1\right] \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ (1-p)z + pz^{1/3}, & 0 \le z < 1, \\ 1, & 1 < z. \end{cases} \\ f_Z(z) &= \begin{cases} 1 - p + \frac{pz^{-2/3}}{3}, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \int_0^1 ((1-p)u + pu^3)du = \frac{1-p}{2} + \frac{p}{4} = \boxed{\frac{2-p}{4},} \\ \mathbb{E}\left[Z^2\right] &= \int_0^1 ((1-p)u^2 + pu^6)du = \frac{1-p}{3} + \frac{p}{7} = \boxed{\frac{7-4p}{21},} \\ \mathbb{E}[ZU] &= \int_0^1 ((1-p)u^2 + pu^4)du = \frac{1-p}{3} + \frac{p}{5} = \boxed{\frac{5-2p}{15}.} \end{aligned}$$

3.3.

$$\mathbb{E}\left[(Z-\lambda U)^2\right] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - 2\lambda\mathbb{E}[ZU] + \lambda^2\mathbb{E}\left[U^2\right].$$

Since this expression is quadratic in λ, we can differentiate to obtain the minimiser

$$\hat{\lambda} = \frac{\mathbb{E}[ZU]}{\mathbb{E}[U^2]} = 3\left(\frac{1-p}{3} + \frac{p}{5}\right) = \boxed{\frac{5-2p}{5}.}$$

4. Uniform Verteilt **[6 Punkte]**

Wir betrachten i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, wobei alle X_i die uniforme Verteilung auf $[a, b]$ mit $a < b$ besitzen. Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung von $(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für a und b für diese Realisierung $(x_1, \ldots, x_n)$.

Hinweis: Die Likelihood-Funktion ist nicht differenzierbar. Es kann probiert werden erst die intuitiv richtige Lösung hinzuschreiben und anschliessend zu beweisen, dass diese korrekt ist.

Lösung:

Wir behandeln den allgemeinen Fall der uniformen Verteilung auf $[a, b]$ und bestimmen den Maximum-Likelihood-Schätzer für die Parameter a und b. Die Likelihood-funktion ist gegeben als

$$L_x(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) = \frac{1}{(b-a)^n} \prod_{i=1}^{n} 1_{[a,b]}(x_i). \tag{1}$$

Jetzt müssen wir $\hat{a}$ und $\hat{b}$ finden sodass

$$L_x(\hat{a}, \hat{b}) = \max_{a,b} L_x(a, b)$$

gilt. Es muss somit $L_x(a, b)$ für feste $(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich a und b maximiert werden. Seien $x_* := \min_{1 \le i \le n} x_i$ und $x^* := \max_{1 \le i \le n} x_i$. Falls x_* oder x^* ausserhalb $[a, b]$ liegen, dann verschwindet die rechte Seite von (1). Also muss die Maximumstelle $(\hat{a}, \hat{b})$ die Bedingungen $\hat{b} \ge x^* \ge x_* \ge \hat{a}$ erfüllen. Für $\boxed{\hat{a} := x_* = \min_{1 \le i \le n} x_i}$ und $\boxed{\hat{b} := x^* = \max_{1 \le i \le n} x_i}$ ist $L_x(a, b) \le L_x(\hat{a}, \hat{b})$ für alle a, b. Somit liefert das die Maximum-Likelihood-Schätzungen für a und b.

5. Drei Würfel **[5 Punkte]**

Wir werfen drei normale 6-seitige Würfel. Seien X, Y, Z die geworfenen Augenzahlen mit Werten in $\{1, \dots, 6\}$.

5.1. **[2 Punkte]** Was ist $\mathbb{P}[X = 1 \mid X + Y + Z \leq 4]$?

5.2. **[2 Punkte]** Was ist $\mathbb{P}[X + Y + Z \geq 15 \mid X \geq 4]$?

5.3. **[1 Punkt]** Was ist $\mathbb{P}[X + Y < Z]$?

Lösung:

5.1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X+Y+Z \leq 4] &= \frac{1+3}{6^3} = \frac{1}{54}, \\
\mathbb{P}[\{X=1\} \cap \{X+Y+Z \leq 4\}] &= \frac{1+2}{6^3} = \frac{1}{72}, \\
\mathbb{P}[X = 1 \mid X+Y+Z \leq 4] &= \frac{\mathbb{P}[\{X=1\} \cap \{X+Y+Z \leq 4\}]}{\mathbb{P}[X+Y+Z \leq 4]} \\
&= \boxed{\frac{3}{4}.}
\end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \geq 4] &= \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}[\{X+Y+Z \geq 15\} \cap \{X \geq 4\}] &= \sum_{k=4}^{6} \mathbb{P}[\{Y+Z \geq 15-k\} \cap \{X = k\}] \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{5}{18}\right) = \frac{3+6+10}{6^3} = \frac{19}{216}, \\
\mathbb{P}[X+Y+Z \geq 15 \mid X \geq 4] &= \frac{\mathbb{P}[\{X+Y+Z \geq 15\} \cap \{X \geq 4\}]}{\mathbb{P}[X \geq 4]} \\
&= \boxed{\frac{19}{108}.}
\end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X+Y < Z] &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}[\{X+Y < k\} \cap \{Z = k\}] \\
&= \frac{1}{6}\left(0 + 0 + \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{5}{18}\right) \\
&= \frac{1+3+6+10}{6^3} \\
&= \boxed{\frac{5}{54}.}
\end{aligned}$$