Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc, 2. Vordiplom D-ITET)

1. a) Es muss gelten

$$1 = \lim_{t\to\infty} F_X(t) = \frac{3}{4} + c\int_2^\infty \frac{1}{s^2}\,ds = \frac{3}{4} + c\left[-\frac{1}{s}\right]_2^\infty = \frac{3}{4} + \frac{c}{2}.$$

Also ist $c = \frac{1}{2}$.

b)

$$P[X=0] = F_X(0) - \lim_{t\uparrow 0} F_X(t) = 0$$

$$P[X=2] = F_X(2) - \lim_{t\uparrow 2} F_X(t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P[1 < X \leq 2] = F_X(2) - F_X(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

c) Mit

$$F_X(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\int_2^t \frac{1}{s^2}\,ds = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{s}\right]_2^t = 1 - \frac{1}{2t} \quad \text{für } t \geq 2$$

folgt

$$F_Y(t) = P[\log(X) \leq t] = P\left[X \leq e^t\right] = F_X\left(e^t\right) = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{8} & \text{falls } t < \log 2, \\ 1 - \frac{e^{-t}}{2} & \text{falls } t \geq \log 2. \end{cases}$$

d) Nein. Da die Verteilungsfunktion von X an der Stelle 2 einen Sprung hat, kann X keine Dichtefunktion besitzen.

2. Wir definieren die Ereignisse

$$V := \{\text{M. fährt mit dem Velo}\},$$
$$B := \{\text{M. fährt mit dem Bus}\}.$$

a) Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned} P[V \mid T \in [3.5, 4.5]] &= \frac{P[T \in [3.5,4.5] \mid V]P[V]}{P[T \in [3.5,4.5] \mid V]P[V] + P[T \in [3.5,4.5] \mid B]P[B]} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

b) Falls $T \leq 2$, dann kann M. nicht mit dem Bus gefahren sein, da in diesem Fall $T \in [3, 6]$ gilt. Also $P[B \mid T \leq 2] = 0$.

c) Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$P[T \leq x] = P[T \leq x \,|\, V]P[V] + P[T \leq x \,|\, B]P[B] =$$

$$= \begin{cases} 0 + 0 & = 0 & (x < 1) \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}(x-1) & = \frac{1}{4}(x-1) & (x \in [1,3)) \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(x-3) & = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} & (x \in [3,4)) \\ \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(x-3) & = \frac{1}{12}x + \frac{1}{2} & (x \in [4,6)) \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & = 1 & (x \geq 6). \end{cases}$$

3. a) Da X und Y nur Werte in $[0, \infty)$ annehmen können, nimmt auch M nur Werte in $[0, \infty)$ an. Für $m \in [0, \infty)$ gilt dann

$$\begin{aligned} f_M(m) &= \frac{d}{dm} P[M \leq m] = \frac{d}{dm} P[X, Y \leq m] = \frac{d}{dm} \left(P[X \leq m] P[Y \leq m] \right) \\ &= \frac{d}{dm} \big((1 - e^{-2m})(1 - e^{-3m}) \big) = 3e^{-3m}(1 - e^{-2m}) + 2e^{-2m}(1 - e^{-3m}) \\ &= 3e^{-3m} + 2e^{-2m} - 5e^{-5m}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P[X > 2Y] &= \int_0^\infty \int_{2y}^\infty f_X(x) f_Y(y) dx\, dy = \int_0^\infty P[X > 2y] f_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-2 \cdot 2y} 3e^{-3y} dy = \int_0^\infty 3e^{-7y} dy = -\frac{3}{7} e^{-7y} \Big|_0^\infty = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

c) Aus $M + Z = \max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$ folgt

$$E[M + Z] = E[X] + E[Y] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$