Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (12 Punkte) Um zu entscheiden, in welche Mensa Franz jeweils essen geht, geht er wie folgt vor: er nimmt zufällig eine Münze aus seiner Hosentasche, wirft die Münze, und geht in die Uni-Mensa, wenn Kopf erscheint, oder in die ETH-Mensa, wenn Zahl erscheint. Franz hat 5 Münzen in seiner Hosentasche:

- 3 sind fair: Kopf und Zahl erscheinen mit der selben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$;
- 2 sind unfair: Kopf erscheint mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ und Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$.

Wenn man um 12 Uhr in die ETH-Mensa geht, wartet man höchstens 10 Minuten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, und wenn man in die Uni-Mensa geht, wartet man höchstens 10 Minuten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Franz in die ETH-Mensa geht?

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 10 Minuten wartet?

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in die Uni-Mensa gegangen ist, gegeben dass er weniger als 10 Minuten gewartet hat?

d) In einem Monat isst Franz 20 Mal in jeweils einer der zwei Mensen. Sei X die Anzahl seiner Mittagessen in der Uni-Mensa in einem Monat. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Die nächste Frage ist unabhängig von den vorherigen Fragen.

e) Die Wartezeit in einer Warteschlange W ist Log-normal mit Parameter (μ, σ) verteilt. Das heisst, die Wahrscheinlichkeitsdichte von W ist

$$f_W(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

(i) Wir nehmen an, dass $\sigma = 1$. Geben Sie die Definition von Log-Likelihood an und berechnen Sie den Maximum Likelihood Schätzer von μ für n Beobachtungen.

(ii) Sie beobachten folgende 5 Wartezeiten:

$$w_1 = \exp(1)\,,\ w_2 = \exp(2)\,,\ w_3 = \exp(3)\,,\ w_4 = \exp(1.5)\,,\ w_5 = \exp(2.5)\,.$$

Berechnen Sie den Maximum Likelihood Schätzwert von μ.

Bitte wenden!

2. (10 Punkte) Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0,1)$ und sei Y eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parameter (X, p).

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von a^X für $0 < a < \frac{1}{1-p}$.
Hinweis: Für $0 \leqslant x < 1$ *gilt* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.
Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ *und* $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

c) Sind X und Y unabhängig? Beweisen Sie die Unabhängigkeit oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

d) Geben Sie die Definitionen der Varianz von Y und der Kovarianz von X und Y an. Berechnen Sie zudem beide Grössen.

e) Geben Sie die Definition der besten linearen Prognose von Y durch X an und berechnen Sie diese. (Die Herleitung der Formel für die beste lineare Prognose wird nicht verlangt.)

3. (8 Punkte) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c\dfrac{y}{x^5} & \text{wenn } x \geqslant 1 \text{ und } 1 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Konstante c, so dass $f_{(X,Y)}$ die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) Berechnen Sie die Randdichte und den Erwartungswert von X.

c) Sind X und Y unabhängig? Beweisen Sie die Unabhängigkeit oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y.