Prof. Dr. A.-S. Sznitman ETH Zürich Sommer 2015

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten zwei Urnen A und B. Die Urne A enthält 2 grüne und 3 blaue Kugeln. Die Urne B enthält 2 grüne Kugeln und 1 blaue Kugel.

a) Man wählt zufällig eine Urne und zieht 2 Kugeln aus der gewählten Urne zufällig *mit* zurücklegen. Falls die gezogenen Kugeln beide grün sind, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde?

b) Man ändert das Verfahren wie folgt. Man wählt zufällig eine Urne und zieht 2 Kugeln aus der gewählten Urne zufällig *ohne* zurücklegen. Falls die gezogenen Kugeln beide grün sind, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde?

c) Man ändert das Verfahren erneut. Man zieht 2 Kugeln aus der Urne A zufällig *ohne* zurücklegen. Was ist die erwartete Anzahl gezogener blauer Kugeln?

2. (10 Punkte) Seien X, Y und Z unabhängige Zufallsvariablen mit einer respektiv Poisson(λ), Poisson(μ) und Bernoulli(p) Verteilung, wobei $\lambda, \mu > 0$ und $0 < p < 1$. Seien $S = X + Y$ und $T = X + ZY$.
Hinweis: Formeln für $E[X]$, $E[X^2]$ und $\mathrm{Var}(X)$ müssen nicht hergeleitet werden.

a) Leiten Sie die charakteristische Funktion $\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right]$, $t \in \mathbb{R}$, her. Finden Sie die charakteristische Funktion $\varphi_S(t) = E\left[e^{itS}\right]$, $t \in \mathbb{R}$. Was ist die Verteilung von S?

b) Finden Sie $P[T = n]$, $n \geq 0$. Berechnen Sie zudem $E[T]$.

c) Seien $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$. Finden Sie $P[T = n | X = k]$.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Man wählt zufällig einen Punkt $A = (X, Y)$ in dem Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{1}{2} \le \max\{|x|, |y|\} \le 1\}$, siehe Abbildung 1. Daraus folgt, dass die gemeinsame Dichte von (X, Y) folgende Form besitzt.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{falls } \frac{1}{2} \le |x| \le 1 \text{ und } |y| \le 1, \\ c, & \text{falls } |x| \le \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \le |y| \le 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

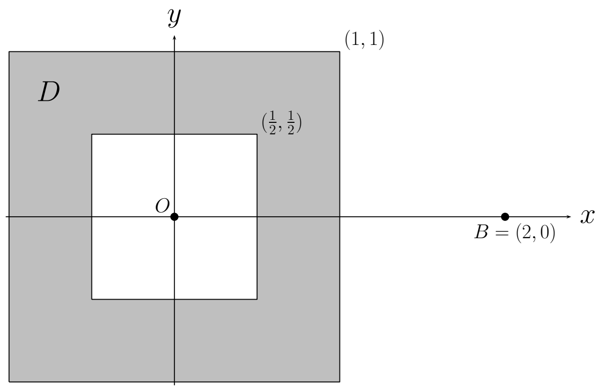

Abbildung 1: Der Punkt A wird zufällig in dem grauen Gebiet D gewählt.

Sei $V = (2 \max\{|X|, |Y|\})^2$ die Fläche des Quadrates, welches seinen Mittelpunkt im Ursprung $O = (0, 0)$ hat und bei welchem der Punkt A auf einer der Seitenkanten liegt. Sei weiter ϱ der Abstand vom Punkt A zum Punkt $B = (2, 0)$.

a) Bestimmen Sie die Konstante c. Bestimmen Sie die Dichte von X und die Dichte von Y.

b) Finden Sie $E[X^2]$ und $E[\varrho^2]$. Was ist die beste lineare Prognose von ϱ^2 durch X? *Hinweis:* Verwenden Sie ohne Beweis, dass $E[X] = E[X^3] = E[XY^2] = 0$.

c) Berechnen Sie die Dichte von V. Berechnen Sie $E[V]$.