Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
(BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten vier Würfel, wovon drei fair sind (d.h. jede der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ kommt mit derselben Wahrscheinlichkeit vor) und ein Würfel ist gezinkt. Bei dem gezinkten Würfel kommt die Augenzahl 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ vor und die restlichen Augenzahlen $2, \ldots, 6$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Die Würfel seien äusserlich nicht unterscheidbar und es werde nun zufällig ein Würfel gewählt und damit einmal gewürfelt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl eine 1 ist? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezinkte Würfel gewählt wurde, falls die Augenzahl 1 gewürfelt wurde?

b) Wir wiederholen nun dieses Vorgehen, d.h. in jedem Schritt wird einer der vier Würfel gewählt und es wird damit einmal gewürfelt. Es bezeichne T den Zeitpunkt, bei welchem zum ersten Mal die Augenzahl 2 gewürfelt wird. Finde $\mathrm{P}[T = k]$, für $k \geq 1$. Benennen Sie die Verteilung von T und geben Sie die dazugehörigen Parameter an. Berechnen Sie den Erwartungswert von T.

c) Wir wiederholen dieses Vorgehen genau zehn Mal. U bezeichne die Anzahl der Fälle in den 10 Wiederholungen, bei denen der gezinkte Würfel gezogen wurde. Berechnen Sie $\mathrm{E}[U]$ und $\mathrm{Var}(U)$.

2. (10 Punkte) Seien U und V Zufallsvariablen, die nur den Wert 0 und 1 annehmen können. Die Verteilung von U, V is so, dass

$$\mathrm{P}[U = 0] = 1/4,\ \mathrm{P}[V = 0] = 1/2,\ \mathrm{P}[U = 0, V = 0] = a.$$

a) Welche Werte darf a annehmen? Für welche Werte sind U und V unabhängig?

b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}[U]$, $\mathrm{E}[V]$, und $\mathrm{E}[UV^2]$.
Hinweis: Die Lösungen können von a abhängig sein.

c) Was ist die beste lineare Prognose von V durch U?
Hinweis: Die Herleitung der Formel für die beste lineare Prognose wird nicht verlangt. Die Lösung kann von a abhängig sein.

3. (10 Punkte) Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

b) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie $\mathrm{P}[X \leq Y]$.