Aufgaben und Lösungsvorschlag Gruppe A

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Für die ersten zwei Fragen sei $\Omega = \{0,1\}^2$, d.h. $\Omega = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$, und wir betrachten das Laplace-Modell auf Ω. Definieren Sie die Zufallsvariablen X und Y durch $X(\omega_1,\omega_2) = \omega_1$ und $Y(\omega_1,\omega_2) = \omega_2$ für $\omega = (\omega_1,\omega_2) \in \Omega$.

1.MC1 [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbb{P}[X = Y]$.

(A) **TRUE:** $\mathbb{P}[X = Y] = \frac{1}{2}$.
(B) $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.
(C) $\mathbb{P}[X = Y] = \frac{1}{3}$.
(D) $\mathbb{P}[X = Y] = \frac{1}{4}$.

Lösung:

Wir haben

$$\mathbb{P}[X = Y] = \mathbb{P}[X = Y = 0] + \mathbb{P}[X = Y = 1] = \mathbb{P}[\{(0,0)\}] + \mathbb{P}[\{(1,1)\}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

1.MC2 [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbb{E}[XY]$.

(A) $\mathbb{E}[XY] = 0$.
(B) $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{2}$.
(C) $\mathbb{E}[XY] = 1$.
(D) **TRUE:** $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{4}$.

Lösung:

Das einzige $\omega \in \Omega$, für das das Produkt $X(\omega)Y(\omega)$ ungleich null ist, ist $\omega = (1,1)$. Also haben wir

$$\mathbb{E}[XY] = X(1,1) \times Y(1,1) \times \mathbb{P}[\{(1,1)\}] = 1 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Alternativ können wir feststellen, dass X und Y i.i.d. sind mit $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$. Folglich ist

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (\mathbb{E}[X])^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Für die nächsten zwei Fragen seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-2x-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) = \begin{cases} 2e^{-2x-y}, & \text{wenn } x \geq 0 \text{ und } y \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist die Randdichte f_X von X?

(A) $f_X(x) = e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \ x \in \mathbb{R}$.
(B) $f_X(x) = 2e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \ x \in \mathbb{R}$.
(C) $f_X(x) = 2e^{-2x}, \ x \in \mathbb{R}$.
(D) **TRUE:** $f_X(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \ x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir haben

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(y)\mathrm{d}y = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\int_0^\infty e^{-y}\mathrm{d}y = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.MC4 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von e^{-Y}?

(A) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = e^{-1}$.
(B) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = 2$.
(C) **TRUE:** $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{2}$.
(D) $\mathbb{E}[e^{-Y}] = 1$.

Lösung:

Wir haben

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x)\mathrm{d}x = e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y)\int_0^\infty 2e^{-2x}\mathrm{d}x = e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Mit anderen Worten ist $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Also folgt

$$\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int e^{-y}f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-2y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_{y=0}^\infty = \frac{1}{2}.$$

Alternativ können wir direkt berechnen

$$\mathbb{E}[e^{-Y}] = \iint e^{-y}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-2y}\int_0^\infty 2e^{-2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-2y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe liegt für jede Frage die Anzahl der richtigen Antworten zwischen 0 und 4. (Multiple choice)

Wir haben ein Kartendeck mit 10 Karten, nummeriert von 1 bis 10. Für jede Zahl in $\{1, \dots, 10\}$ gibt es also genau eine Karte mit dieser Zahl. Wir ziehen nacheinander drei Karten, ohne die Karten zurückzulegen. Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die die jeweiligen Zahlen der gezogenen Karten darstellen.

2.MC1 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) X und Y sind unabhängig.

(B) **TRUE:** $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.

(C) **TRUE:** X und Y haben die gleiche Verteilung.

(D) Die Verteilungsfunktion von Z ist stetig.

Lösung:

(A) ist **nicht** wahr, denn zum Beispiel ist $\mathbb{P}[X = 1, Y = 1] = 0 < \mathbb{P}[X = 1]\mathbb{P}[Y = 1]$.
(B) ist wahr. Wir haben $\mathbb{P}[X = i] = 1/10$ für jedes $i \in \{1, \dots, 10\}$ und

$$\mathbb{P}[Y = i] = \sum_{j \neq i} \mathbb{P}[X = j, Y = i] = \sum_{j \neq i} \frac{1}{10} \times \frac{1}{9} = 9 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}.$$

(C) ist wahr, weil (B) wahr ist.
(D) ist **nicht** wahr, da Z eine diskrete Verteilung hat.

2.MC2 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) **TRUE:** $\mathbb{E}[XY] \geq 0$.

(B) **TRUE:** $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2Y) = 4\mathrm{Cov}(X, Y) - 2\mathrm{Var}[Y]$.

(C) **TRUE:** $\mathbb{P}[Y = 2 \,|\, X = 1] > \mathbb{P}[Y = 2]$.

(D) **TRUE:** $\mathbb{E}[X + Y + Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z]$.

Lösung:

(A) ist wahr, da $X(\omega)Y(\omega) \geq 0$ für jedes $\omega \in \Omega$.
(B) ist wahr aufgrund der Linearität des Erwartungswertes.
(C) ist wahr, weil $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2Y) = \mathrm{Cov}(2X, 2Y) + \mathrm{Cov}(-Y, 2Y) = 4\mathrm{Cov}(X, Y) - 2\mathrm{Var}[Y]$.
(D) ist wahr, weil $\mathbb{P}[Y = 2 \,|\, X = 1] = \frac{1}{9} > \frac{1}{10} = \mathbb{P}[Y = 2]$.

Für die nächste Frage sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und wir bezeichnen mit Φ die Verteilungsfunktion von X.

2.MC3 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) **TRUE:** $\mathbb{P}[X \leq 34] = 1 - \Phi(-34)$.

(B) **TRUE:** Für jedes $a < b$ gilt $\mathbb{P}[X \in (a, b]] > 0$.

(C) **TRUE:** Für jedes $a < b$ gilt $\mathbb{P}[X \in (a, b]] = \Phi(b) - \Phi(a)$.

(D) Die Zufallsvariable $Z := 2X - 3$ hat die Verteilung $\mathcal{N}(-3, 2)$.

Lösung:

(A) ist wahr.
(B) ist **nicht** wahr, da $Z \sim \mathcal{N}(-3, 4)$.
(C) ist wahr, weil $\varphi(x) > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, wobei $\varphi = \Phi'$ die Dichte von X bezeichnet.
(D) ist wahr. Wegen der Symmetrie und Stetigkeit der Normalverteilung haben wir

$$\mathbb{P}[X \leq 34] = \mathbb{P}[X \geq -34] = 1 - \mathbb{P}[X \leq -34] = 1 - \Phi(-34).$$

Für die nächste Frage seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$.

2.MC4 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(A) **TRUE:** $\mathbb{P}[\Omega \setminus (A \cap B)] \leq \mathbb{P}[A^c] + \mathbb{P}[B^c]$.

(B) **TRUE:** Wenn $A \subseteq B$ und $\mathbb{P}[B] > 0$ ist, dann gilt $\mathbb{P}[A|B] \geq \mathbb{P}[A]$.

(C) Wenn $\mathbb{P}[A] > 0$ und $0 < \mathbb{P}[B] < 1$ ist, dann gilt $\mathbb{P}[B|A] = \dfrac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A|B] + \mathbb{P}[A|B^c]}$.

(D) $\mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]$.

Lösung:

(A) ist wahr, da $\mathbb{P}[\Omega \setminus (A \cap B)] = \mathbb{P}[(A \cap B)^c] = \mathbb{P}[A^c \cup B^c] \leq \mathbb{P}[A^c] + \mathbb{P}[B^c]$.
(B) ist **nicht** im Allgemeinen wahr.
(C) ist **nicht** wahr. Die korrekte Version des Satzes von Bayes ist

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}[B^c]}.$$

(D) ist wahr. Wenn $A \subseteq B$ ist, dann gilt

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} \geq \mathbb{P}[A].$$

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Seien X und Y zwei unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, die Werte in $\{1,2\}$ annehmen, wobei

$$\mathbb{P}[X=i]=\mathbb{P}[Y=i]=\frac{1}{2}, \quad i\in\{1,2\}.$$

Definieren Sie $Z := X+Y$.

3.MC1 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathbb{P}[Z=3]$?

(A) $\mathbb{P}[Z=3]=\frac{1}{4}$.
(B) $\mathbb{P}[Z=3]=0$.
(C) **TRUE:** $\mathbb{P}[Z=3]=\frac{1}{2}$.
(D) $\mathbb{P}[Z=3]=\frac{1}{3}$.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z=3]&=\mathbb{P}[X+Y=3]=\mathbb{P}[X=1,\,Y=2]+\mathbb{P}[X=2,\,Y=1]\\&=\mathbb{P}[X=1]\mathbb{P}[Y=2]+\mathbb{P}[X=2]\mathbb{P}[Y=1]=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3.MC2 [1 Punkt] Was ist die Verteilungsfunktion von Z?

(A) $F_Z(a)=\begin{cases}0, & a<2,\\ 1/4, & 2\le a<3,\\ 5/6, & 3\le a<4,\\ 1, & 4\le a.\end{cases}$

(B) $F_Z(a)=\begin{cases}0, & a<2,\\ 1/3, & 2\le a<3,\\ 3/4, & 3\le a<4,\\ 1, & 4\le a.\end{cases}$

(C) $F_Z(a)=\begin{cases}0, & a<2,\\ 1/4, & 2\le a<3,\\ 1/2, & 3\le a<4,\\ 1, & 4\le a.\end{cases}$

(D) **TRUE:** $F_Z(a)=\begin{cases}0, & a<2,\\ 1/4, & 2\le a<3,\\ 3/4, & 3\le a<4,\\ 1, & 4\le a.\end{cases}$

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z=2] &= \mathbb{P}[X+Y=2] = \mathbb{P}[X=1,\, Y=1] = \mathbb{P}[X=1]\mathbb{P}[Y=1] = \frac{1}{4},\\
\mathbb{P}[Z=3] &= \mathbb{P}[X+Y=3] = \mathbb{P}[X=1,\, Y=2] + \mathbb{P}[X=2,\, Y=1]\\
&= \mathbb{P}[X=1]\mathbb{P}[Y=2] + \mathbb{P}[X=2]\mathbb{P}[Y=1] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\\
\mathbb{P}[Z=4] &= \mathbb{P}[X+Y=4] = \mathbb{P}[X=2,\, Y=2] = \mathbb{P}[X=2]\mathbb{P}[Y=2] = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Also

$$F_Z(a) = \mathbb{P}[Z \le a] = \begin{cases} 0, & a < 2,\\ 1/4, & 2 \le a < 3,\\ 3/4, & 3 \le a < 4,\\ 1, & 4 \le a. \end{cases}$$

3.MC3 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathrm{Var}[Y]$?

(A) $\mathrm{Var}[Y] = \frac{19}{4}$.

(B) $\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{2}$.

(C) **TRUE:** $\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{4}$.

(D) $\mathrm{Var}[Y] = 0$.

Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

und

$$\mathbb{E}[Y^2] = 1 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Also ist

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

3.MC4 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathrm{Cov}(X,Z)$?

(A) **TRUE:** $\mathrm{Cov}(X,Z) = \frac{1}{4}$.

(B) $\mathrm{Cov}(X,Z) = \frac{19}{4}$.

(C) $\mathrm{Cov}(X,Z) = 0$.

(D) $\mathrm{Cov}(X,Z) = \frac{1}{2}$.

Lösung:

Wir haben

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[X(X+Y)] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 1 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

und

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$
$$\mathbb{E}[Z] = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = 3,$$
$$\text{(Alternativ: } \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\mathbb{E}[X] = 3.)$$

Also haben wir

$$\mathbb{E}[XZ] = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{19}{4},$$

und folglich ist

$$\operatorname{Cov}(X,Z) = \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] = \frac{19}{4} - \frac{3}{2} \times 3 = \frac{1}{4}.$$

Alternative Lösung: Wir haben

$$\operatorname{Cov}(X,Z) = \operatorname{Cov}(X, X+Y) = \operatorname{Cov}(X,X) + \operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Var}[X],$$

weil X und Y unabhängig sind. Unter Verwendung der obigen Rechnungen erhalten wir also

$$\operatorname{Cov}(X,Z) = \operatorname{Var}[X] = \operatorname{Var}[Y] = \frac{1}{4}.$$

3.MC5 [1 Punkt] Was ist der Wert von $\mathbb{P}[X=1 \,|\, Z \in \{2,3\}]$?

(A) $\mathbb{P}[X=1 \,|\, Z \in \{2,3\}] = \frac{5}{6}$.
(B) **TRUE:** $\mathbb{P}[X=1 \,|\, Z \in \{2,3\}] = \frac{2}{3}$.
(C) $\mathbb{P}[X=1 \,|\, Z \in \{2,3\}] = \frac{1}{2}$.
(D) $\mathbb{P}[X=1 \,|\, Z \in \{2,3\}] = 1$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = 1 \,|\, Z \in \{2,3\}] &= \frac{\mathbb{P}[X = 1,\, Z \in \{2,3\}]}{\mathbb{P}[Z \in \{2,3\}]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X = 1,\, Y \in \{1,2\}]}{\mathbb{P}[Z \in \{2,3\}]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X = 1]}{\mathbb{P}[Z = 2] + \mathbb{P}[Z = 3]} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = cxye^{-y}\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) = \begin{cases} cxye^{-y}, & \text{wenn } 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq y, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

4.A1 [2 Punkte] Finden Sie den Wert von c.

Hinweis: Sie können die Identität $\int_0^\infty y^n e^{-y} \mathrm{d}y = n!$ für $n \in \mathbb{N}$ benutzen.

Lösung:

Es muss gelten $1 = \iint f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Wir haben

$$\begin{aligned} \iint f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= c\int_0^\infty \int_0^y xye^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= c\int_0^\infty ye^{-y}\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0}^{y}\mathrm{d}y \\ &= c\int_0^\infty \frac{y^3}{2}e^{-y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{c}{2}\int_0^\infty y^3e^{-y}\mathrm{d}y \\ &= 3c. \end{aligned}$$

Dies ergibt $c = \frac{1}{3}$.

4.A2 [1 Punkt] Finden Sie die Randdichte f_Y von Y.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x \\ &= c\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y)\int_0^y xye^{-y}\mathrm{d}x \\ &= cye^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y)\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0}^{y} \\ &= c\frac{y^3}{2}e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) \\ &= \frac{y^3}{6}e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.A3 [1 Punkt] Finden Sie eine Formel für die Dichte der Zufallsvariablen $T := 2Y$ ausgedrückt mit f_Y.

Lösung:

Wir haben

$$\mathbb{P}[T \le a] = \mathbb{P}[2Y \le a] = \mathbb{P}\Big[Y \le \frac{a}{2}\Big] = \int_0^{a/2} f_Y(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^a f_Y\Big(\frac{\tilde{y}}{2}\Big)\mathrm{d}\tilde{y},$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $\tilde{y} = 2y$ verwendet haben. Also folgt

$$f_T(t) = \frac{1}{2} f_Y\Big(\frac{t}{2}\Big).$$

Explizit ist

$$f_T(t) = \frac{1}{2}\frac{c}{2}\frac{t^3}{8}e^{-t/2}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) = \frac{t^3}{96}e^{-t/2}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Alternative Lösung: Wir haben

$$\mathbb{P}[T \le t] = \mathbb{P}[2Y \le t] = \mathbb{P}\Big[Y \le \frac{t}{2}\Big] = F_Y\Big(\frac{t}{2}\Big).$$

Die Kettenregel ergibt

$$f_T(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}[T \le t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_Y\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{1}{2}f_Y\Big(\frac{t}{2}\Big).$$

4.A4 [1 Punkt] Berechnen Sie den Erwartungswert von X^2/Y.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{X^2}{Y}\Big] &= \iint \frac{x^2}{y} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= c\int_0^\infty \int_0^y x^3 e^{-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= c\int_0^\infty \frac{y^4}{4}e^{-y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{c}{4}4! \\ &= 6c \\ &= 2.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Seien $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_i = -1] = p$ für ein $p \in (0,1)$.

5.A1 [2.5 Punkte] Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p. Sie müssen **nicht** überprüfen, ob der gefundene Punkt tatsächlich ein Maximum ist.

Lösung:

Setzen wir $S_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{1\}}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i+1}{2}$ und $s_n := \sum_{i=1}^n \frac{x_i+1}{2}$, so haben wir

$$L(x_1, \dots, x_n; p) = \prod_{i=1}^n p(x_i) = p^{s_n}(1-p)^{n-s_n}.$$

Also ist

$$\log L(x_1, \dots, x_n; p) = s_n \log p + (n - s_n) \log(1-p).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial p} \log L(x_1, \dots, x_n; p) = \frac{s_n}{p} - \frac{n - s_n}{1-p}.$$

Daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial p} \log L(x_1, \dots, x_n; p) = 0 \iff s_n(1-p) - p(n-s_n) = 0 \iff pn = s_n \iff p = \frac{s_n}{n}.$$

Daraus ergibt sich die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion

$$\widehat{p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{1\}}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i + 1}{2},$$

und der Maximum-Likelihood-Schätzer ist $\widehat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{S_n}{n}$.

Alternative Lösung: Wir beachten, dass wir durch die Definition von

$$Y_i := \frac{X_i + 1}{2}$$

eine Zufallsstichprobe $Y_1, \dots, Y_n$ aus einer Bernoulli-Verteilung mit Parameter p erhalten. Dann folgt aus einem Resultat aus der Vorlesung oder ähnlichen Berechnungen wie oben, dass der ML-Schätzer für p gegeben ist durch $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Dies ergibt $\widehat{p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i+1}{2}$ und der ML-Schätzer ist wie zuvor angegeben.

Wir interpretieren nun X_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ als Ergebnisse von Spielen in einem Casino. Konkret bedeutet

$$\{X_i = -1\} = \text{“das Casino gewinnt das } i\text{-te Spiel”},$$
$$\{X_i = 1\} = \text{“der Spieler gewinnt das } i\text{-te Spiel”}.$$

Das Casino behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, mindestens 0.5 ist. Als Spieler haben wir jedoch Zweifel an dieser Behauptung und möchten sie mit einem statistischen Test auf Basis der beobachteten Werte von $X_1, \ldots, X_n$ widerlegen.

5.A2 [0.5 Punkte] Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese für diese Situation.

Lösung:

Wir setzen

$$\mathrm{H}_0 : p \geq 0.5 \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_1 : p < 0.5.$$

Alternative Lösung:

$$\mathrm{H}_0 : p = 0.5 \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_1 : p < 0.5.$$

5.A3 [2 Punkte] Finden Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes eine geeignete Teststatistik und deren approximative Verteilung für einen geeigneten Wert von p unter der Nullhypothese. "Geeignet" bedeutet hier, dass die approximative Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese bekannt ist und von keinen Parametern abhängt.

Lösung:

Ist $p = 0.5$, so gilt $\mathbb{P}_0[X_i = 1] = 1 - \mathbb{P}_0[X_i = -1] = 0.5$.

Wir haben $\mathbb{E}[X^i] = 1/2 \times 1 + 1/2 \times (-1) = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] = 1$. Unter Verwendung der Unabhängigkeit und des zentralen Grenzwertsatzes erhalten wir für $p = 0.5$ approximativ

$$T_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\bar{X}_n \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1),$$

wobei $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

5.A4 [3 Punkte] Finden Sie den approximativen kritischen Bereich (d.h. beschreiben Sie das Testverfahren) für das Signifikanzniveau 5%.

Lösung:

Wir verwerfen die Nullhypothese, wenn T_n zu klein ist. Ferner ist

$$\mathbb{P}_{p=0.5}[T_n \leq c] \approx \Phi(c).$$

Wir möchten also

$$\begin{aligned} \Phi(c) = 0.05 &\iff 1 - \Phi(c) = 0.95 \\ &\iff \Phi(-c) = 0.95 \\ &\iff -c = \Phi^{-1}(0.95) \\ &\iff -c = 1.6449 \\ &\iff c = -1.6449. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit den approximativen kritischen Bereich für T_n als $(-\infty, -1.6449]$ oder, äquivalent, den approximativen kritischen Bereich für $\sum_{i=1}^{n} X_i$ als $(-\infty, -1.6449\sqrt{n}]$ oder, äquivalent, den approximativen kritischen Bereich für $\bar{X}_{100}$ als $\Big(-\infty, -1.6449\sqrt{\frac{1}{n}}\Big]$.

Anders ausgedrückt: wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn $T_n \leq -1.6449$ ist oder, äquivalent, wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn $\sum_{i=1}^{100} X_i \leq -1.6449\sqrt{n}$ ist oder, äquivalent, wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn $\bar{X}_{100} \leq -1.6449\sqrt{\frac{1}{n}}$ ist.

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.