Probability and Statistics
FS 2018
Prüfung
23.01.2019
Dauer: 180 Minuten

Name: ____________________

Legi-Nummer: ____________________

- Diese Prüfung enthält 12 Seiten (zusammen mit dem Deckblatt) und 10 Aufgaben. Das Formelblatt wird separat verteilt.
- Begründen Sie ihre Lösungen sorgsam. Ergebnisse ohne Rechenwege und Begründungen geben KEINE Punkte.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Punktetabelle (wird von den Korrektoren beschriftet)

Aufgabe	Punkte	erreichte Punktzahl
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10 (∗)	10	
Gesamt	90	

Die maximal erreichbare Punktzahl ist 90. Aufgabe 10 ist eine **Bonusaufgabe**.

Viel Erfolg

1. (10 points) Franz und Peter lassen sich im Fach Stochastik prüfen. Jede Prüfung wird mit einer der drei Noten A, B oder C bewertet. Die beiden schätzen den Ausgang ihrer Prüfungen folgendermassen ein: Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter ein B bekommt, ist 0.3. Die Wahrscheinlichkeit, dass Franz ein B erhält, ist 0.4. Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der beiden ein A, jedoch mindestens einer der beiden ein B bekommt, ist 0.1. Wie gross ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer der beiden ein B und keiner ein C erhält? Definieren Sie zur Beantwortung dieser Frage zunächst einen geeigneten Grundraum.

2. (10 points) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir definieren die *charakteristische Funktion von X* durch

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \phi_X(t) := E\left[e^{itX}\right] = \int e^{itx}\,\mu(dx), \end{aligned}$$

wobei μ die Verteilung von X ist (die letzte Gleichung folgt aus dem Transformationssatz für Masse). Sie stellt ein wichtiges analytisches Hilfsmittel dar, welches die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig bestimmt (charakterisiert).

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, falls X und $-X$ dieselbe Verteilung haben,

b) $|\phi_X(t)| \leq 1$,

c) ϕ_X ist stetig,

d) $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,

e) $\phi'_X(0) = iE[X]$, falls $E[|X|] < \infty$, wobei Sie ohne Begründung Integration und Differentiation vertauschen dürfen.

3. (10 points) Berechnen Sie jeweils die charakteristische Funktion ϕ_X der Zufallsvariablen X, falls ...

   a) X Laplace-verteilt (mit Parameter $\lambda > 0$) ist, also die Dichte f besitzt mit

   $$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

   b) X eine Dreiecksverteilung hat, also die Dichte g besitzt mit

   $$g(x) = (1 - |x|)1_{[-1,1]}(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

   c) X normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 > 0$

4. (10 points) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $E[X^2] < \infty$, $E[Y^2] < \infty$ und $\mathbb{V}[X] > 0$. Die Korrelation von X und Y sei mit $\rho := \rho(X, Y)$ bezeichnet. Wir wollen Y vorhersagen, einerseits mit einer Konstanten β und andererseits mit einer linearen Funktion $\alpha X + \beta$. Dabei wollen wir, dass der mittlere quadratische Fehler $E[(Y - \text{Prognose})^2]$ minimal wird.

   a) Bestimmen Sie β so, dass $E[(Y - \beta)^2]$ minimal wird und geben Sie das zugehörige Minimum an.

   b) Bestimmen Sie α und β so, dass $E[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$ minimal wird und geben Sie auch hier das zugehörige Minimum an.

5. (10 points) Hundert Würfe einer Münze haben sechzigmal Kopf ergeben. Wir wollen analysieren, ob diese Münze fair sein kann. **Hinweis: Benutzen Sie die Normalapproximation bei dieser Aufgabe.**

   a) Führen Sie einen zweiseitigen Test zum 1%-Niveau durch. Wird die Nullhypothese verworfen?

   b) Wie oft darf Kopf in hundert Würfen höchstens auftreten, so dass wir die Annahme, dass die Münze fair ist, auf einem 1%-Niveau nicht verwerfen müssen? Führen Sie hier einen einseitigen Test durch.

   c) Geben Sie ein 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit an, in einem einzigen Wurf dieser Münze Kopf zu erhalten.

   Hinweis: Runden Sie geeignet. Die Werte $\Phi(x)$ einer Standardnormalverteilung sind:

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Ablesebeispiel: $\Phi(1.02) = 0.8461$.

6. (10 points) Es seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2 y} & \text{für } x \geq 1,\ y > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $f_{X,Y}(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Berechnen Sie die Randdichte von X.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq \frac{1}{nX^2})$, mit $n \in \mathbb{N}$.

7. (10 points) Die Anzahl Y defekter Stellen auf einem Chip sei poissonverteilt mit Parameter λ. Sei X die Anzahl der Fehler in einem bestimmten Teilgebiet des Chips. Wir nehmen an, dass sich jeder der insgesamt Y Fehler unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ in diesem Teilgebiet befindet.

   a) Bestimmen Sie die Verteilung von X und die von $Y - X$.

   b) Sind X und $Y - X$ unabhängig voneinander?

8. (10 points) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, entspreche dem Ereignis "im Zeitpunkt i tritt das Phänomen Ψ auf".

   a) Drücken Sie mit Hilfe der A_i die folgenden Ereignisse als Mengen $A \in \mathcal{A}$ aus:

      (i) Ψ tritt nie auf
      (ii) Ψ tritt immer wieder auf
      (iii) Ψ tritt schliesslich nicht mehr auf
      (iv) Ψ tritt genau zweimal auf
      (v) Ψ tritt höchstens in ungeraden Zeitpunkten auf

   b) Welche der Ereignisse aus (i)–(v) gehören stets zur asymptotischen σ-Algebra

$$\mathcal{A}^* := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma(\{A_k; k \geq i\})?$$

9. (10 points) Sei $C \in (0, \infty)$ und $0 \leq \lambda_n \leq C$. Ferner seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_n, d.h. $P(X_n = k) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!}$ für $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Zeigen Sie, dass

$$P(X_n \geq n \text{ für unendlich viele } n) = 0$$

gilt.

10. (10 points) (∗) Seien $X_2, X_3, ...$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n \log n}$ und $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n \geq 2}$ das schwache, aber nicht das starke Gesetz der grossen Zahlen erfüllt.

    Hinweis: Das Integral $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c, c \in \mathbb{R}$ kann hilfreich sein.