D–MATH

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-2604-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Alle Zufallsvariablen sind auf einem fixierten impliziten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ definiert.

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariable X schreiben wir $\mathrm{E}(X)$ und für die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 1

Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen so, dass

$$\forall n \geq 1 \quad \mathrm{P}(X_n = n) = \mathrm{P}(X_n = -n) = 1/2.$$

Für $n \geq 1$, definieren wir

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1.A1 [1 Punkt] Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{E}(X_n)$.

1.A2 [1 Punkt] Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{E}(S_n)$.

1.A3 [1 Punkt] Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{Var}(X_n)$.

1.A4 [1 Punkt] Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass $\mathrm{Var}(S_n) \leq n^3$.

1.A5 [1 Punkt] Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{E}(S_n^3)$.

1.A6 [3 Punkte] Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass

$$\mathrm{E}(S_n^4) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^4\Big) + 6 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^2 X_j^2\Big).$$

Folgere, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass $\mathrm{E}(S_n^4) \leq 3n^6$.

1.A7 [2 Punkte] Für $n \geq 1$ definiere wir

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

Zeige, dass

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

1.A8 [2 Punkte] Zeige, dass gilt

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \mathrm{P}(Z_n \leq a\sqrt{n}) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

1.A9 [2 Punkte] Berechne $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \leq 2025)$.

Aufgabe 2

Seien X, Y unabhängige Exp(1) Zufallsvariablen.

2.A1 [2 Punkte] Zeige, dass $\min(X, Y) \sim \mathrm{Exp}(2)$ gilt.

2.A2 [1 Punkt] Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Abbildung. Begründe, dass gilt

$$\mathrm{E}\Big(\phi(X, Y)\Big) = \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(x, y) e^{-x} e^{-y} \, dx \, dy.$$

2.A3 [3 Punkte] Definiere

$$L = \min(X, Y) \quad \text{und} \quad M = \max(X, Y).$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Abbildung. Zeige, dass gilt

$$\mathrm{E}\Big(\psi(M - L, L)\Big) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(u, l) e^{-u} e^{-2l} \, du \, dl.$$

2.A4 [2 Punkte] Zeige, dass $M - L$ unabhängig von L ist.

Aufgabe 3

Sei $\Theta = \mathbb{R}$, und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen die durch Θ parametrisiert sind. Sei $n \geq 1$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen, so dass unter P_θ gilt

- $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt (uiv.) und
- X_i hat die Dichte gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\theta(x) = 2(\theta - x)1_{x\in[\theta-1,\theta]}.$$

3.A1 **[2 Punkte]** Zeichne f_θ für $\theta = 1$ und $\theta = 4$ direkt in die entsprechenden Koordinatensysteme im Antwortheft. Überprüfe, dass f_θ für jedes $\theta \in \Theta$ eine Dichte definiert.

3.A2 **[1 Punkt]** Fixiere $x_0 = 0$ und zeichne $\theta \mapsto f_\theta(x_0)$ in das entsprechende Koordinatensystem im Antwortheft.

3.A3 **[3 Punkte]** Beweise, dass der Maximum-Likelihood Schätzer durch $T = \min(X_1, \ldots, X_n) + 1$ gegeben ist.

3.A4 **[2 Punkte]** Sei $\theta \in \Theta$ und $a \in [0, 1]$. Berechne $\mathrm{P}_\theta(X_1 > a + \theta - 1)$.

3.A5 **[2 Punkte]** Sei $\theta \in \Theta$ und $a \in [0, 1]$. Zeige, dass gilt

$$\mathrm{P}\Big(\min(X_1, \ldots, X_n) > a + \theta - 1\Big) = (1 - a)^{2n}.$$

3.A6 **[2 Punkte]** Ist T erwartungstreu?

3.A7 **[1 Punkt]** Zeige, dass

$$\mathrm{P}_\theta(\theta - 1 \leq T \leq \theta + a - 1) = 1 - (1 - a)^{2n}.$$

3.A8 **[2 Punkte]** Konstruiere ein 95% Konfidenzintervall für θ von der Form $[T + 1 - a, T + 1]$, wobei $a \in [0, 1)$ eine explizite Konstante ist, die bestimmt werden muss.

Aufgabe 4

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X definiert als

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 0, \\ a/3 & \text{wenn } 0 \leq a < 1, \\ 2/3 & \text{wenn } 1 \leq a < 2, \\ 1 & \text{wenn } a \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Erinnerung: $F_X(a) = \mathrm{P}(X \leq a)$.

4.MC1 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) X ist stetig
(B) X ist diskret
(C) X ist weder stetig noch diskret
(D) X^2 ist diskret
(E) X^2 ist stetig

4.MC2 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $\mathrm{P}(X = 1) = 1/3$
(B) $\mathrm{P}(X = 1) = 2/3$
(C) $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X < 1)$
(D) $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(X < 1)$
(E) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/3$

4.MC3 [2 Punkte] Was ist $\mathrm{Var}(X)$?

(A) $5/3$
(B) $7/6$
(C) $1/2$
(D) 1
(E) $11/36$

4.MC4 [2 Punkte] Was ist $\mathrm{P}(2X \in \mathbb{Z})$?

(A) $1/3$
(B) $8/9$
(C) $5/6$
(D) 1

(E) 2/3

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion (1). Seien Z und Y Zufallsvariablen, so dass

$$Z \sim \mathcal{U}\Big([0,1]\Big) \quad \text{und} \quad Y \sim \mathcal{U}\Big(\{0,1,2\}\Big).$$

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\lfloor x \rfloor$ als die grösste ganze Zahl die kleiner oder gleich x ist.

4.MC5 [2 Punkte] Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $X \overset{(d)}{=} Z + 1_{Z=0}Y$

(B) $X \overset{(d)}{=} Z + Y$

(C) $X \overset{(d)}{=} YZ$

(D) $\lfloor X \rfloor \overset{(d)}{=} Z$

(E) $X1_{X\leq 1} \overset{(d)}{=} Y$

Aufgabe 5

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

5.MC1 [2 Punkte] Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{N}(0,1)$ Zufallsvariablen. Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{wenn } n \to \infty$

(B) $\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k X_k}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{wenn } n \to \infty$

(C) $\frac{\sum_{k=1}^n X_k^2}{n} \xrightarrow{f.s.} 1 \quad \text{wenn } n \to \infty$

(D) $\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k X_k^2}{n} \xrightarrow{f.s.} 1 \quad \text{wenn } n \to \infty$

(E) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k^3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \quad f.s.$

5.MC2 [2 Punkte] Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{U}\Big([0,1]\Big)$ Zufallsvariablen. Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, $\frac{f(X_1)+\cdots+f(X_n)}{n} \xrightarrow{f.s.} f(1/2)$ wenn $n \to \infty$

(B) $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, konvergiert $f(X_1)\cdots f(X_n)$ f.s. wenn $n \to \infty$

(C) $X_1 \cdots X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ wenn $n \to \infty$

(D) Es existiert ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass $(X_1 \cdots X_n)^{1/n} \xrightarrow{f.s.} r$ wenn $n \to \infty$

(E) $(X_1 \cdots X_n)^{1/n^2}$ konvergiert nicht f.s. wenn $n \to \infty$

5.MC3 [2 Punkte]

Sei $\Theta = (0,1)$ und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen indiziert durch Θ. Betrachte die folgenden Hypothesen:

$$H_0 : \theta = 0.9,$$
$$H_1 : \theta = 0.5.$$

Seien $X_1, \ldots, X_5$ unabhängige $\mathrm{Ber}(\theta)$ Zufallsvariablen unter P_θ. Wir betrachten den Test

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } X_1 + \cdots + X_5 \leq 1, \\ 0 & \text{wenn } X_1 + \cdots + X_5 > 1. \end{cases}$$

Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) Der Test hat das Niveau 0.00046 und Macht 13/16.

(B) Der Test hat das Niveau 0.00046 und Macht 3/16.

(C) Der Test hat das Niveau 0.00001 und Macht 13/16.

(D) Der Test hat das Niveau 0.00001 und Macht 3/16.

(E) Wenn wir $(0,1,0,0,0)$ beobachten, dann verwerfen wir H_0.