# Aufgaben und Lösungsvorschlag
# Gruppe v0

Alle Zufallsvariablen sind auf einem fixierten impliziten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ definiert.

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariable $X$ schreiben wir $\mathrm{E}(X)$ und für die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

## Aufgabe 1

Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen so, dass

$$\forall n \geq 1 \quad \mathrm{P}(X_n = n) = \mathrm{P}(X_n = -n) = 1/2.$$

Für $n \geq 1$, definieren wir

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

**1.A1 [1 Punkt]** Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{E}(X_n)$.

**Lösung:**

For all $n \geq 1$ we have

$$\mathrm{E}(X_n) = n(1/2) - n(1/2) = 0.$$

**1.A2 [1 Punkt]** Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{E}(S_n)$.

**Lösung:**

Note that for all $n \geq 1$ we have

$$\mathrm{E}(X_n) = n(1/2) - n(1/2) = 0.$$

So, by linearity, we have

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = 0.$$

**1.A3 [1 Punkt]** Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{Var}(X_n)$.

**Lösung:**

Let $n \geq 1$. Since $X_n^2 = n^2$ with probability 1 and $\mathrm{E}(X_n) = 0$ from the previous part, we have $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - \mathrm{E}(X_n)^2 = n^2$.

**1.A4 [1 Punkt]** Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass $\mathrm{Var}(S_n) \leq n^3$.

**Lösung:**

Since the $(X_n)$'s are independent we get

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = 1^2 + \cdots + n^2 \leq n^3.$$

**1.A5 [1 Punkt]** Für $n \geq 1$, berechne $\mathrm{E}(S_n^3)$.

**Lösung:**

Since $X_k$ has the same distribution as $-X_k$, we get that $S_n$ has the same distribution as $-S_n$, so

$$\mathrm{E}(S_n^3) = \mathrm{E}((-S_n)^3) = -\mathrm{E}(S_n^3).$$

So $\mathrm{E}(S_n^3) = 0$.

**1.A6 [3 Punkte]** Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass

$$\mathrm{E}(S_n^4) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^4\Big) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^2 X_j^2\Big).$$

Folgere, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass $\mathrm{E}(S_n^4) \leq 3n^6$.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S_n^4) &= \mathrm{E}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} X_i X_j X_k X_l\Bigg) \\ &= \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} \mathrm{E}(X_i X_j X_k X_l).\end{aligned}$$

Now, if any one of the indices is not equal to any of the others we get that $\mathrm{E}(X_i X_j X_k X_l) = 0$. Indeed, assume $i$ is this index, then by independence we have

$$\mathrm{E}(X_i X_j X_k X_l) = \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j X_k X_l) = 0.$$

So we are left only with terms of the form $\mathrm{E}(X_i^2 X_j^2)$. Accounting for the terms where $i = j$ and $i \neq j$ seperately we obtain,

$$\mathrm{E}(S_n^4) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^4\Big) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^2 X_j^2\Big).$$

Now, for all $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{E}(X_i^4) = i^4 \leq n^4$ so we get

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^4\Big) \leq n^5.$$

Also, for all $1 \leq i \neq j \leq n$, by independence, $\mathrm{E}(X_i^2 X_j^2) = \mathrm{E}(X_i^2)\mathrm{E}(X_j^2) \leq n^4$. Furthermore, there are $n(n-1)/2$ such indices, so we get,

$$6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{E}\Big(X_i^2 X_j^2\Big) \leq 3n^6 - 3n^5.$$

Using these two estimates we obtain $\mathrm{E}(S_n^4) \leq 3n^6 - 2n^5 \leq 3n^6$, as required.

**1.A7** [**2 Punkte**] Für $n \geq 1$ definiere wir

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

Zeige, dass

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

**Lösung:**

Observe that $(X_k/k)_{k\geq 1}$ are iid $\mathcal{U}(\{-1,1\})$ random variables. So by the strong law of large numbers $Z_n/n$ converges almost surely to $\mathrm{E}(X_1) = 0$.

**1.A8** [**2 Punkte**] Zeige, dass gilt

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \mathrm{P}(Z_n \leq a\sqrt{n}) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

**Lösung:**

Since $(X_k/k)$ is iid sequence with expectation 0 and variance 1, we have by the central limit theorem that $Z_n/\sqrt{n}$ converges in distribution to a $\mathcal{N}(0,1)$ random variable. Let $Z$ be a $\mathcal{N}(0,1)$ random variable. Since, the distribution function of $Z$ is continuous, we have for all $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(Z_n \leq a\sqrt{n}) = \mathrm{P}\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \leq a\right) \to \mathrm{P}(Z \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

**1.A9** [**2 Punkte**] Berechne $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \leq 2025)$.

**Lösung:**

First, since $\{Z_n \leq 0\} \subset \{Z_n \leq 2025\}$ we have $\mathrm{P}(Z_n \leq 0) \leq \mathrm{P}(Z_n \leq 2025)$ and by the previous part we have $\mathrm{P}(Z_n \leq 0) \to 1/2$, so we get $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \leq 2025) \geq 1/2$. Second, for all $a > 0$ we have for $n$ large enough, $\mathrm{P}(Z_n \leq 2025) \leq \mathrm{P}(Z_n \leq a\sqrt{n}) \to \mathrm{P}(Z \leq a)$. Letting $a$ tend to 0 and using the continuity of the distribution function of $Z$, we obtain

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \leq 2025) \leq \mathrm{P}(Z \leq 0) = 1/2.$$

# Aufgabe 2

Seien $X, Y$ unabhängige Exp(1) Zufallsvariablen.

**2.A1 [2 Punkte]** Zeige, dass $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(2)$ gilt.

**Lösung:**

Let $a \in \mathbb{R}$. When $a \leq 0$ we have $\text{P}(\min(X, Y) \geq a) = 1$. Let $a > 0$. Then we get

$$\text{P}(\min(X, Y) \geq a) = \text{P}(X \geq a, Y \geq a) = \text{P}(X \geq a)\text{P}(Y \geq a) = e^{-2a},$$

where we used that $X, Y$ are independent in the second equality and that $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ in the third. This shows that $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(1)$.

**2.A2 [1 Punkt]** Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Abbildung. Begründe, dass gilt

$$\text{E}\Big(\phi(X, Y)\Big) = \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(x, y) e^{-x} e^{-y} \, dx \, dy.$$

**Lösung:**

Since $X$ and $Y$ are independent the joint density of $(X, Y)$ is $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x} e^{-y} 1_{x \geq 0} 1_{y \geq 0}$. The required formula then follows from a result from the lectures.

**2.A3 [3 Punkte]** Definiere

$$L = \min(X, Y) \quad \text{und} \quad M = \max(X, Y).$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Abbildung. Zeige, dass gilt

$$\text{E}\Big(\psi(M - L, L)\Big) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(u, l) e^{-u} e^{-2l} \, du \, dl.$$

**Lösung:**

Using the formula in the previous part we obtain,

$$\begin{aligned}
\text{E}\Big(\psi(M - L, L)\Big) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(\max(x, y) - \min(x, y), \min(x, y)) e^{-x} e^{-y} \, dx \, dy \\
\text{(symmetry)} \qquad &= 2 \int_0^\infty \int_x^\infty \psi(\max(x, y) - \min(x, y), \min(x, y)) e^{-x} e^{-y} \, dy \, dx \\
&= 2 \int_0^\infty \int_x^\infty \psi(y - x, x) e^{-x} e^{-y} \, dy \, dx \\
(z = y - x) \qquad &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(z, x) e^{-z} e^{-2x} \, dx \, dz
\end{aligned}$$

**2.A4 [2 Punkte]** Zeige, dass $M - L$ unabhängig von $L$ ist.

**Lösung:**

We see that from the formula in the previous part that the density of $M-L$ is given by $f_{M-L}(u) = e^{-u}1_{u\geq 0}$ and that the density of $L$ is given by $f_L(l) = 2e^{-l}1_{l\geq 0}$ (we actually already knew this from the first part). Furthermore, the formula gives that the joint density is given by

$$f_{M-L,L}(u,l) = 2e^{-u}e^{-2l}1_{u\geq 0}1_{l\geq 0} = f_{M-L}(u)f_L(l).$$

Therefore, $M-L$ and $L$ are independent.

# Aufgabe 3

Sei $\Theta = \mathbb{R}$, und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen die durch $\Theta$ parametrisiert sind. Sei $n \geq 1$ und seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen, so dass unter $\mathrm{P}_\theta$ gilt

- $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt (uiv.) und
- $X_i$ hat die Dichte gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\theta(x) = 2(\theta - x)1_{x\in[\theta-1,\theta]}.$$

**3.A1 [2 Punkte]** Zeichne $f_\theta$ für $\theta = 1$ und $\theta = 4$ direkt in die entsprechenden Koordinatensysteme im Antwortheft. Überprüfe, dass $f_\theta$ für jedes $\theta \in \Theta$ eine Dichte definiert.

**Lösung:**

Let $\theta \in \Theta$. Note that $f_\theta(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ and

$$\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\, dx = \int_{\theta-1}^{\theta} 2(\theta - x)\, dx = 1.$$

So $f_\theta(x)$ defines a density on $\mathbb{R}$

**3.A2 [1 Punkt]** Fixiere $x_0 = 0$ und zeichne $\theta \mapsto f_\theta(x_0)$ in das entsprechende Koordinatensystem im Antwortheft.

**3.A3 [3 Punkte]** Beweise, dass der Maximum-Likelihood Schätzer durch $T = \min(X_1, \dots, X_n) + 1$ gegeben ist.

**Lösung:**

Fix $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. By independence, the joint density of $X_1, \dots, X_n$ is given by

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = 2^n \prod_{i=1}^{n} (\theta - x_i) 1_{x_i\in[\theta-1,\theta]} = 2^n 1_{\max(x_1,\dots,x_n)\leq\theta\leq\min(x_1,\dots,x_n)+1} \prod_{i=1}^{n} (\theta - x_i).$$

We need to find $\theta$ that maximises $f_\theta(x)$. First, we may assume that $\max(x_1, \dots, x_n) \leq \min(x_1, \dots, x_n)+1$, for if not $f_\theta(x) = 0$ for all $\theta$. Now, if $\max(x_1, \dots, x_n) \leq \min(x_1, \dots, x_n)+1$, we claim that $\theta^* = \min(x_1, \dots, x_n) + 1$ maximises $f_\theta(x)$.

Indeed, if $\theta$ is not in the interval $[\max(x_1, \dots, x_n), \min(x_1, \dots, x_n) + 1]$, then $f_\theta(x) = 0$ and for all $\theta \in [\max(x_1, \dots, x_n), \min(x_1, \dots, x_n) + 1]$ we get

$$f_\theta(x) = 2^n \prod_{i=1}^{n} (\theta - x_i) \leq 2^n \prod_{i=1}^{n} (\theta^* - x_i) = f_{\theta*}(x),$$

which completes the proof.

**3.A4 [2 Punkte]** Sei $\theta \in \Theta$ und $a \in [0, 1]$. Berechne $\mathrm{P}_\theta(X_1 > a + \theta - 1)$.

**Lösung:**

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 > a + \theta - 1) = 2\int_{a+\theta-1}^{\theta} (\theta - x)\, dx = (1-a)^2.$$

**3.A5 [2 Punkte]** Sei $\theta \in \Theta$ und $a \in [0,1]$. Zeige, dass gilt

$$\mathrm{P}\Big(\min(X_1, \dots, X_n) > a + \theta - 1\Big) = (1-a)^{2n}.$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Big(\min(X_1, \dots, X_n) > a + \theta - 1\Big) &= \mathrm{P}(X_1 > a+\theta-1, \dots, X_n > a+\theta-1) \\ \text{(independence)} \quad &= \mathrm{P}(X_1 > a+\theta-1)^n \\ &= (1-a)^{2n}. \end{aligned}$$

**3.A6 [2 Punkte]** Ist $T$ erwartungstreu?

**Lösung:**

Putting $a = 0$ we get $\mathrm{P}(T > \theta) = 1$. So $\mathrm{E}(T) > \theta$. Therefore, $T$ is not unbiased.

**3.A7 [1 Punkt]** Zeige, dass

$$\mathrm{P}_\theta(\theta - 1 \le T \le \theta + a - 1) = 1 - (1-a)^{2n}.$$

**Lösung:**

Since $\mathrm{P}_\theta(T \ge \theta - 1) = 1$ we have $\mathrm{P}_\theta(\theta - 1 \le T \le \theta + a - 1) = 1 - \mathrm{P}(T > \theta + a - 1) = (1-a)^{2n}$.

**3.A8 [2 Punkte]** Konstruiere ein 95% Konfidenzintervall für $\theta$ von der Form $[T + 1 - a, T + 1]$, wobei $a \in [0,1)$ eine explizite Konstante ist, die bestimmt werden muss.

**Lösung:**

Observe that $1 - (1-a)^{2n} = \mathrm{P}_\theta(\theta - 1 \le T \le \theta + a - 1) = \mathrm{P}(T - a + 1 \le \theta \le T + 1)$. Let $a = 0.05^{1/2n}$. Then

$$\mathrm{P}_\theta(\theta \in [T - a + 1, T + 1]) = 0.95$$

.

# Aufgabe 4

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X$ definiert als

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 0, \\ a/3 & \text{wenn } 0 \leq a < 1, \\ 2/3 & \text{wenn } 1 \leq a < 2, \\ 1 & \text{wenn } a \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

*Erinnerung:* $F_X(a) = \mathrm{P}(X \leq a)$.

**4.MC1 [2 Punkte]** Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $X$ ist stetig
(B) $X$ ist diskret
(C) **TRUE:** $X$ ist weder stetig noch diskret
(D) $X^2$ ist diskret
(E) $X^2$ ist stetig

**4.MC2 [2 Punkte]** Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = 1) = 1/3$
(B) $\mathrm{P}(X = 1) = 2/3$
(C) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X < 1)$
(D) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(X < 1)$
(E) **TRUE:** $\mathrm{P}(X = 2) = 1/3$

**4.MC3 [2 Punkte]** Was ist $\mathrm{Var}(X)$?

(A) 5/3
(B) 7/6
(C) 1/2
(D) 1
(E) 11/36

**Lösung:**

None of the answers is correct (the correct solution is 5/12).

**4.MC4 [2 Punkte]** Was ist $\mathrm{P}(2X \in \mathbb{Z})$?

(A) 1/3

(B) 8/9

(C) 5/6

(D) 1

(E) **TRUE:** 2/3

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion (1). Seien $Z$ und $Y$ Zufallsvariablen, so dass

$$Z \sim \mathcal{U}\Big([0,1]\Big) \quad \text{und} \quad Y \sim \mathcal{U}\Big(\{0,1,2\}\Big).$$

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\lfloor x \rfloor$ als die grösste ganze Zahl die kleiner oder gleich $x$ ist.

**4.MC5 [2 Punkte]** Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $X \overset{(d)}{=} Z + 1_{Z=0}Y$

(B) $X \overset{(d)}{=} Z + Y$

(C) $X \overset{(d)}{=} YZ$

(D) $\lfloor X \rfloor \overset{(d)}{=} Z$

(E) $X1_{X\leq 1} \overset{(d)}{=} Y$

**Lösung:**

Keine der Aussagen ist wahr.

# Aufgabe 5

Markiere in den folgenden Fragen alle Aussagen die wahr sind (mehrere Aussagen können wahr sein).

**5.MC1 [2 Punkte]** Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{N}(0,1)$ Zufallsvariablen. Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) **TRUE:** $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad$ wenn $n \to \infty$

(B) **TRUE:** $\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k X_k}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad$ wenn $n \to \infty$

(C) **TRUE:** $\frac{\sum_{k=1}^n X_k^2}{n} \xrightarrow{f.s.} 1 \quad$ wenn $n \to \infty$

(D) $\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k X_k^2}{n} \xrightarrow{f.s.} 1 \quad$ wenn $n \to \infty$

(E) **TRUE:** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k^3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \quad f.s.$

**5.MC2 [2 Punkte]** Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{U}\Big([0,1]\Big)$ Zufallsvariablen. Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, $\frac{f(X_1)+\cdots+f(X_n)}{n} \xrightarrow{f.s.} f(1/2)$ wenn $n \to \infty$

(B) $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, konvergiert $f(X_1)\cdots f(X_n)$ f.s. wenn $n \to \infty$

(C) **TRUE:** $X_1 \cdots X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ wenn $n \to \infty$

(D) **TRUE:** Es existiert ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass $(X_1 \cdots X_n)^{1/n} \xrightarrow{f.s.} r$ wenn $n \to \infty$

(E) $(X_1 \cdots X_n)^{1/n^2}$ konvergiert nicht f.s. wenn $n \to \infty$

**5.MC3 [2 Punkte]**

Sei $\Theta = (0,1)$ und sei $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen indiziert durch $\Theta$. Betrachte die folgenden Hypothesen:

$$H_0 : \theta = 0.9,$$
$$H_1 : \theta = 0.5.$$

Seien $X_1, \ldots, X_5$ unabhängige $\mathrm{Ber}(\theta)$ Zufallsvariablen unter $\mathrm{P}_\theta$. Wir betrachten den Test

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } X_1 + \cdots + X_5 \leq 1, \\ 0 & \text{wenn } X_1 + \cdots + X_5 > 1. \end{cases}$$

Markiere die wahre(n) Aussage(n).

(A) Der Test hat das Niveau 0.00046 und Macht 13/16.

(B) **TRUE:** Der Test hat das Niveau 0.00046 und Macht 3/16.

(C) Der Test hat das Niveau 0.00001 und Macht 13/16.

(D) Der Test hat das Niveau 0.00001 und Macht 3/16.

(E) **TRUE:** Wenn wir $(0,1,0,0,0)$ beobachten, dann verwerfen wir $H_0$.