Martins Axiom

Sascha M. Baer, Marisa Bühler

April 2020

1 Definitionen und Einführung

Definition 1.1. Sei P eine Menge, dann definieren wir eine **Partialordnung** $\leq$ auf P als eine Relation, welche transitiv (d.h. $p \leq q$ und $q \leq r$ impliziert $p \leq r$ für alle $p, q, r \in P$) und reflexiv (d.h. $p \leq p$ für alle $p \in P$) ist. Es ist wichtig, dass in diesem Kontext eine Partialordnung nicht antisymmetrisch (d.h. $p \leq q$ und $q \leq p$ impliziert $p = q$ für alle $p, q \in P$) sein muss, auch wenn dies in unseren Beispielen häufig der Fall sein wird. Wir nennen zwei Elemente $p, q \in P$ **kompatibel**, falls es ein $r \in P$ gibt mit $p, q \leq r$. Ansonsten nennen wir sie **inkompatibel**.

Beispiel 1.2. Wir können eine Partialordnung auf einer endlichen Menge schematisch mittels einem gerichteten Graphen darstellen. Wenn x, y zwei Knoten sind und es eine Kante $x \to y$ gibt, so gelte $x \leq y$. Die Relation $\leq$ sei dann gegeben durch den reflexiven und transitiven Abschluss der bereits festgelegten Relationen. Wir werden dies tun, um die nachfolgenden Definitionen zu veranschaulichen. Anstatt Pfeilen werden wir dabei einfach die Position der Knoten verwenden – ist y über x so gelte $x \leq y$.

Beispiel 1.3. Sei P eine Familie von Mengen, dann definiert die Inklusion $\subseteq$ eine (antisymmetrsiche) Partialordnung.

Beispiel 1.4. Seien I, J zwei Mengen und $\mathrm{Fn}(I, J)$ die Menge der **endlichen partiellen Funktionen**, d.h. $f \in \mathrm{Fn}(I, J)$ wenn $f : X \to J$ für eine endliche Teilmenge $X \subseteq I$. Wir definieren nun folgende Relation auf $\mathrm{Fn}(I, J)$:

$$f \leq g \iff \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \wedge g|_{\mathrm{dom}(f)} = f.$$

Man sieht sofort, dass diese Relation eine Partialordung ist. In der Tat handelt es sich hier um die gleiche Partialordnung wie in 1.3, wenn man Funktionen als Mengen von geordneten Paaren betrachtet. Wir werden dieses Beispiel oft verwenden.

Sei nun für die folgenden Definitionen stets $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $C \subseteq P$.

Definition 1.5. C ist (nach oben) **gerichtet**, falls es für alle $p_1, p_2 \in C$ ein $q \in C$ gibt mit $p_1, p_2 \leq q$. In anderen Worten sind also alle Elemente von C kompatibel (in C).

Beispiel 1.6. Eine **Kette** K ist eine Teilmenge von P so dass die Partialordnung $\leq$ auf K eine Totalordnung ist, d.h. $\leq$ ist antisymmetrisch und es gilt $x \leq y \vee y \leq x$ für alle $x, y \in K$. Also sind alle Elemente vergleichbar und insbesondere kompatibel. Ketten sind folglich gerichtet.

Beispiel 1.7. Sind $f, g \in \mathrm{Fn}(I, J)$ zwei kompatible endliche partielle Funktionen, so ist $f \cup g\colon \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g) \to J$ eine wohldefinierte Funktion (ebenfalls endlich partiell), denn es existiert ein $h \in \mathrm{Fn}(I, J)$ mit $h|_{\mathrm{dom}(f)} = f$, $h|_{\mathrm{dom}(g)} = g$ und somit $f|_{\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = h|_{\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g|_{\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}$.

Insbesondere: Falls $C \subseteq \mathrm{Fn}(I, J)$ eine gerichtete Teilmenge ist, so ist $\bigcup C\colon X \to J$ mit $X = \bigcup_{f\in C} \mathrm{dom}(f) \subseteq I$ eine wohldefinierte (aber nicht zwingend endliche) partielle Funktion.

Definition 1.8. C ist eine **Oberhalb-Menge** von P, falls für alle $q \in C$ und $p \in P$ gilt: $q \leq p \implies p \in C$. Analog ist C eine **Unterhalb-Menge** falls $q \geq p \implies p \in C$.

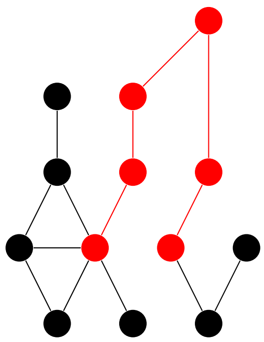

Abbildung 1: Eine gerichtete Teilmenge

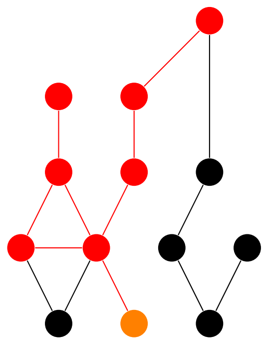

Abbildung 2: Die kleinste Oberhalb-Menge, welche den orangen Knoten enthält.

Definition 1.9. C ist **dicht**, falls es für alle $p \in P$ ein $q \in C$ gibt mit $p \leq q$.

Beispiel 1.10. Auf $(\mathbb{N}, \leq)$ mit der üblichen Ordnung ist eine Menge genau dann dicht, wenn sie unendlich ist.

Bemerkung 1.11. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann können wir eine Topologie auf $\mathbb{P}$ definieren, indem wir alle Oberhalb-Mengen als offen deklarieren. Dies erfüllt die Axiome einer Topologie: sowohl die leere Menge als auch P selber sind offensichtlich Oberhalb-Mengen, die Vereinigung von Oberhalb-Mengen ist ebenfalls offensichtlich eine Oberhalb-Menge. Für O_1, O_2 Oberhalb-Mengen sind, so ist $O = O_1 \cap O_2$ es ebenfalls: Ist $p \in O$ und $q \geq p$, so ist q in O_1 und in O_2, also ebenfalls in O. Entsprechend nennt man Oberhalb-Mengen auch **offen**.

Die **abgeschlossenen** Mengen in dieser Topologie sind Unterhalb-Mengen: Sei O eine Oberhalb-Menge und $U = O^C$. Für $p \in U$ und $q \leq p$ muss $q \in U$ gelten, denn ansonsten wäre $O \ni q \leq p$ und somit $p \in O$. Analog folgt, dass das Komplement jeder Unterhalb-Menge eine Oberhalb-Menge ist.

Dichte Mengen sind dicht bezüglich dieser Topologie: Sei C dicht und O eine nichtleere offene Menge. Sei $p \in O$, dann existiert nach Definition ein $q \in C$ mit $p \leq q$. Doch dann ist $q \in O$, also $O \cap C \neq \emptyset$.

Beispiel 1.12. Sei $\mathbb{P} = (\mathrm{Fn}(I, J), \subseteq)$ und $x \in I$. Dann ist $C := \{f \in \mathrm{Fn}(I, J) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$ eine dichte Oberhalb-Menge:

- Falls $f \in C$ und $g \geq f$ so ist per definitionem $\mathrm{dom}(g) \supseteq \mathrm{dom}(f) \ni x$, also $g \in C$.
- Sei $f \in \mathrm{Fn}(I, J)$. Falls $x \in \mathrm{dom}(f)$, so ist $f \leq f \in C$. Ansonsten wähle $y \in J$ beliebig. Dann ist $f \leq f \cup \langle x, y \rangle \in C$ (die Notation $\langle x, y \rangle$ bezeichne hier das geordnete Tupel, also die Zuweisung $x \mapsto y$).

Definition 1.13. C ist ein **Filter** auf P, falls C eine nichtleere, gerichtete Unterhalb-Menge ist. *Achtung!* Diese Definition unterscheidet sich von Filtern, wie wir sie in den vorherigen Präsentationen gesehen haben. Im Folgenden werden wir uns jedoch immer auf diese Definition von Filter beziehen.

Beispiel 1.14. Analog zu Beispiel 1.7 ist für einen Filter $F \subseteq \mathrm{Fn}(I, J)$ die Funktion $\bigcup F \colon X \to J$ wohldefiniert. Des Weiteren gilt: Falls $f \leq \bigcup F$ für ein $f \in \mathrm{Fn}(I, J)$, so ist $f \in F$. Denn es existieren endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in F$ mit $f \leq \bigcup_{i=1}^n f_i$. Durch iteriertes Anwenden der Gerichtetheit von F finden wir ein $g \in F$ mit $\bigcup_{i=1}^n f_i \leq g$. Da F eine Unterhalb-Menge ist, ist dann auch $f \in F$.

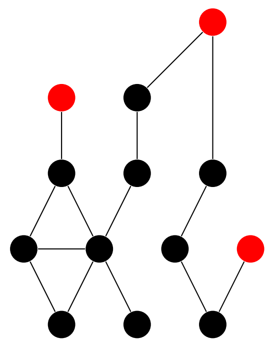

Abbildung 3: Die kleinste dichte Menge in diesem Graphen

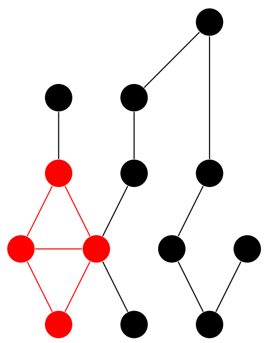

Abbildung 4: Ein Filter

Definition 1.15. Sei nun $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(P)$ eine Menge von dichten Oberhalb-Mengen von P und C ein Filter auf P. Dann nennt man P **$\boldsymbol{\mathcal{D}}$-generisch**, falls für jedes $D \in \mathcal{D}$ gilt $D \cap C \neq \emptyset$.

Die folgende Proposition motiviert Martins Axiom:

Proposition 1.16 ($\mathsf{MA}(\omega)$)**.** *Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $\mathcal{D}$ eine* *abzählbare Menge dichter Oberhalb-Mengen von P. Dann existiert ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P. Genauer gesagt exisitiert sogar für jedes $p \in P$ ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P, der p enthält.*

Beweis. Sei $\mathcal{D}$ eine solche Menge und $p \in P$ beliebig. Da $\mathcal{D}$ abzählbar ist, können wir es schreiben als $\mathcal{D} = \{D_n \mid n \in \omega\}$. Definiere nun $p_{-1} := p$. Da für $n \in \omega$ die Menge D_n dicht ist, finden wir ein $p_n \in D_n$ mit $p_n \geq p_{n-1}$. So ist die Menge $G = \{q \in P \mid \exists n \in \omega(q \leq p_n)\}$ ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P mit $p \in G$. Dass G eine Unterhalb-Menge ist, folgt aus der Definition zusammen mit der Transitivität von $\leq$. Weiter ist G gerichtet, da $\{p_n \mid n \in \omega \cup \{-1\}\}$ eine Kette ist und jedes Element von G kleiner gleich einem Element aus der Kette ist. Also ist G ein Filter. Schliesslich ist G auch $\mathcal{D}$-generisch, da $p_n \in G \cap D_n$ für alle $n \in \omega$. $\square$

Wir möchten nun untersuchen, inwiefern man 1.16 in ZFC verallgemeinern kann. Dazu führen wir noch folgende Begriffe ein:

Definition 1.17. Eine Teilmenge $A \subseteq P$ einer partiell geordneten Menge ist eine **Antikette**, falls alle Elemente von A paarweise inkompatibel sind. Die Menge $(P, \leq)$ erfüllt die **abzählbare Antiketten-Bedingung** *ccc*[1], falls jede Antikette in P abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) ist.

Damit können wir nun eine Verallgemeinerung von Prop. 1.16 betrachten. Sei κ eine Kardinalzahl.

Aussage 1.18 ($\mathsf{MA}(\boldsymbol{\kappa})$)**.** *Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, welche* ccc *erfüllt und sei $\mathcal{D}$ eine Menge mit maximal κ dichten Oberhalb-Mengen von P. Dann existiert ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P.*

Wir haben in Prop. 1.16 bereits gezeigt, dass $\mathsf{MA}(\omega)$ gilt. Wir werden in Prop 2.4 zeigen, dass $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$ falsch ist. Martins Axiom besagt nun, dass $\mathfrak{c}$ die erste Kardinalzahl ist, für die $\mathsf{MA}(\kappa)$ fehlschlagen kann:

Axiom 1.19 (MA)**.** $\mathsf{MA}(\kappa)$ gilt für alle Kardinalzahlen $\kappa < \mathfrak{c}$.

Gilt die Kontinuumshypothese CH (die Aussage, dass die kleinste überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_1 = \mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$ ist), so ist MA durch Prop. 1.16 entschieden. Man kann zeigen, dass MA konsistent mit $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH}$ ist.

2 Notwendigkeit der Bedingungen in MA

Man kann sich nun fragen, ob die Bedingungen in MA nicht noch weiter gelockert werden könnten. Diese Frage wollen wir in diesem Abschnitt negativ beantworten. Zuerst zeigen wir, dass *ccc* notwendig ist.

[1] Nach dem Englischen **countable chain condition**.

Proposition 2.1. *Es gibt eine partiell geordnete Menge $\mathbb{P} = (P, \leq)$ welche* ccc *nicht erfüllt, und eine Familie $\mathcal{D}$ mit Kardinalität $\aleph_1$ aus dichten Oberhalb-Mengen von P, so dass es keinen $\mathcal{D}$-generischen Filter auf P gibt.*

Beweis. Betrachte $\mathbb{P} = (\mathrm{Fn}(\omega, \omega_1), \subseteq)$, wobei ω_1 die erste überabzählbare Ordinalzahl ist (also $|\omega_1| = \aleph_1$). Man bemerke zuerst, dass $\mathbb{P}$ *ccc* nicht erfüllt: Die Menge $\{\langle 0, \alpha\rangle \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$ ist eine überabzählbare Antikette.

Betrachte nun die Mengen

$$D_n := \{f \in \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1) \mid n \in \mathrm{dom}(f)\} \ \forall n \in \omega$$
$$R_\alpha := \{f \in \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1) \mid \alpha \in \mathrm{ran}(f)\} \ \forall \alpha \in \omega_1.$$

Diese sind dichte Oberhalb-Mengen von $\mathbb{P}$: Für D_n haben wir dies bereits in Beispiel 1.12 gezeigt. Analog folgt, dass R_α eine Oberhalb-Menge ist. Für die Dichtheit von R_α betrachte $f \in \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$. Da $\mathrm{dom}(f)$ endlich ist, gibt es ein $n \in \omega$ mit $n \notin \mathrm{dom}(f)$. Dann ist $f \leq f \cup \langle n, \alpha\rangle \in R_\alpha$.

Setzen wir nun

$$\mathcal{D} := \{D_n \mid n \in \omega\} \cup \{R_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\},$$

so ist $\mathcal{D}$ eine Familie der Kardinalität $\aleph_1$ aus dichten Oberhalb-Mengen. Angenommen, $G \subseteq \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$ wäre ein $\mathcal{D}$-generischer Filter, so betrachte die Funktion $f_G = \bigcup G$. Da $G \cap D_n \neq \emptyset$ für alle n ist $\mathrm{dom}(f_G) = \omega$, und da $G \cap R_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in \omega_1$ ist $\mathrm{ran}(f_G) = \omega_1$. In anderen Worten: $f_G \colon \omega \to \omega_1$ ist eine Surjektion. Dies ist ein Widerspruch, also kann es keinen $\mathcal{D}$-generischen Filter geben. $\square$

Nun wollen wir zeigen, dass $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$ nicht stimmen kann. Um ein Beispiel dazu zu konstuieren, zeigen wir zuerst, dass für eine abzählbare Menge J und eine beliebige Menge I die endlichen partiellen Funktionen $\mathrm{Fn}(I, J)$ die *ccc* erfüllen. Dazu brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.2 (**$\boldsymbol{\Delta}$**-System Lemma)**.** *Sei $\mathcal{E}$ eine überabzählbare Familie endlicher Mengen. Dann existiert eine überabzählbare Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ und eine endliche Menge Δ so dass $\forall x \neq y \in \mathcal{F} : x \cap y = \Delta$.*

Beweis. Wir betrachten dazu zwei Fälle.

Fall I. Angenommen es existiere eine überabzählbare Familie $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, so dass für alle $a \in \bigcup \mathcal{E}'$ gilt, dass $\{x \in \mathcal{E}' \mid a \in x\}$ abzählbar ist. Also: Jedes Element, das in irgendeiner Menge der Familie $\mathcal{E}'$ vorkommt, kommt in nur abzählbar vielen Mengen der Familie vor.

Wir wollen nun mittels transfiniter Induktion eine überabzählbare Familie $\mathcal{F} = \{x_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ mit paarweise disjunkten Elementen konstruieren (also $\Delta = \emptyset$). Wähle dazu $x_0 \in \mathcal{E}'$ beliebig. Angenommen, wir haben für $\alpha \in \omega_1$ bereits $\mathcal{F}_\alpha = \{x_\beta \mid \beta \in \alpha\} \subseteq \mathcal{E}'$ mit dieser Eigenschaft. Da $\mathcal{E}'$ eine überabzählbare Familie endlicher Mengen ist, gilt für jede abzählbare Menge $C \subseteq \mathcal{E}'$, dass die Menge $\{x \in \mathcal{E}' \mid x \cap C = \emptyset\}$ überabzählbar ist.

Nun ist für $\alpha \in \omega_1$ die Menge $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{E}'$ und somit auch $\bigcup \mathcal{F}_\alpha$ abzählbar. Damit existiert ein $x_\alpha \in \mathcal{E}'$ mit $x_\alpha \cap \bigcup \mathcal{F}_\alpha = \emptyset$. Dann definieren wir also $\mathcal{F}_{\alpha+1} := \mathcal{F}_\alpha \cup \{x_\alpha\}$. Falls β eine Limeszahl ist, so erfüllt $\mathcal{F}_\beta := \bigcup_{\alpha \in \beta} \mathcal{F}_\alpha$ ebenfalls, dass alle Elemente in ihr paarweise disjunkt sind. So erhalten wir schliesslich $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\omega_1}$, was die gewünschte Eigenschaft mit mit $\Delta = \emptyset$ erfüllt.

Fall II. Angenommen keine solche Familie existiere. Das heisst: Für jede überabzählbare Familie $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ existiert ein $a \in \bigcup \mathcal{E}'$, so dass $\{x \in \mathcal{E}' \mid a \in x\}$ überabzählbar ist.

Da $\mathcal{E}$ eine Familie endlicher Mengen ist, gilt $\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{E}_n$ mit $\mathcal{E}_n = \{x \in \mathcal{E} \mid |x| = n\}$ und da $\mathcal{E}$ überabzählbar ist, existiert ein $n_0 \in \omega$ mit $\mathcal{E}_n$ überabzählbar. Wir können annehmen, dass $n_0 \geq 2$ gilt, da wir sonst in Fall I wären. Wir zeigen nun die folgende Aussage mittels Induktion über $n \geq 2$: Falls $n_0 = n$, so finden wir ein $\mathcal{F}$ wie gewünscht.

Sei $n = 2$. Nach Annahme von Fall II existiert ein $a \in \bigcup \mathcal{E}_2$ so dass a in überabzählbar vielen Elementen von $\mathcal{E}_2$ enthalten ist, d.h. $\mathcal{F} := \{x \in \mathcal{E}_2 \mid a \in x\} \subseteq \mathcal{E}_2$ ist überabzählbar. Da alle Elemente von $\mathcal{F}$ Kardinalität 2 haben, folgt die gewünschte Aussage mit $\Delta = \{a\}$.

Angenommen die Aussage gelte für $n - 1$. Wiederum existiert nach Annahme ein $a \in \bigcup \mathcal{E}_n$, welches in überabzählbar vielen Elementen enthalten ist. Somit können wir die Induktionshypothese auf die überabzählbare Familie $\mathcal{E}_n' := \{x \setminus \{a\} \mid x \in \mathcal{E}_n \wedge a \in x\}$ anwenden[2]. Dies gibt uns ein $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{E}_n'$ und Δ' endlich mit $\forall x \neq y \in \mathcal{F}' : x \cap y = \Delta'$. Die Aussage folgt nun mit $\mathcal{F} := \{x \cup \{a\} \mid x \in \mathcal{F}'\}$ und $\Delta := \Delta' \cup \{a\}$. □

Korrolar 2.3. *Sei I eine beliebige und J eine abzählbare Menge. So gilt:* $\mathrm{Fn}(I, J)$ *erfüllt* ccc.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Fn}(I, J)$ eine überabzählbare Familie endlicher partieller Funktionen. Um zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ keine Antikette sein kann, müssen wir mindestens zwei verschiedene kompatible Funktion finden. Im Folgenden werden wir sogar eine überabzählbare Familie paarweise kompatibler Funktionen finden.

Betrachte $\mathcal{E} := \{\mathrm{dom}(f) \mid f \in \mathcal{A}\}$. Nach Definition von $\mathrm{Fn}(I, J)$ ist $\mathcal{E}$ eine Familie endlicher Mengen. Da J abzählbar ist, kann es für jede endliche Teilmenge K von I nur abzählbar viele partielle Funktionen mit Definitionsbereich K geben. Folglich muss auch $\mathcal{E}$ überabzählbar sein.

Nun können wir das Δ-System Lemma auf $\mathcal{E}$ anwenden und finden eine überabzählbare Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$, und ein endliches $\Delta \subseteq I$, so dass für $X \neq Y \in \mathcal{F}$, $X \cap Y = \Delta$. Nun finden wir mithilfe des Auswahlaxioms zu jedem $X \in \mathcal{F}$ ein $f_X \colon X \to J$ mit $f_X \in \mathcal{A}$. Nenne $\mathcal{F}' := \{f_X \in \mathcal{A} \mid X \in \mathcal{F}\}$.

Da J abzählbar und Δ endlich ist, müssen überabzählbar viele Funktionen in $\mathcal{F}'$ auf Δ übereinstimmen. Das heisst wir finden ein $f_0 \in \mathrm{Fn}(I, J)$ mit $\mathrm{dom}(f_0) = \Delta$ sodass

[2] Streng genommen müssten wir hier eine etwas allgemeinere Aussage zeigen, um die Induktionshypothese anwenden zu können, da $\mathcal{E}_n' \not\subseteq \mathcal{E}$. Der Beweis funktioniert identisch und wäre lediglich verwirrender, da wir neue Namen für Mengen einführen müssten.

$\{g \in \mathcal{F}' \mid g|_\Delta = f_0\}$ eine überabzählbare Familie ist. Nach Bsp. 1.7 haben wir damit eine überabzählbare Familie paarweise kompatibler Funktionen gefunden, womit $\mathcal{A}$ keine Antikette sein kann. □

Proposition 2.4. *MA($\mathfrak{c}$) ist falsch.*

Beweis. Wir konstruieren ein Gegenbeispiel. Betrachte $(\mathrm{Fn}(\omega, 2), \leq)$, dies ist eine partiell geordnete Menge und erfüllt nach obigem Korollar *ccc*.

Für eine beliebige Funktion $g \colon \omega \to \{0,1\}$, also $g \in {}^\omega 2$, definiere $D_g := \{f \in \mathrm{Fn}(\omega, 2) \mid \exists n \in \omega(f(n) = 1 - g(n))\}$, also die Menge aller endlichen partiellen Funktionen, die an mindestens einer Stelle nicht mit g übereinstimmen. Diese Menge ist eine Oberhalb-Menge, da die Erweiterung einer Funktion in D_g ebenfalls an mindestens einer Stelle nicht mit g übereinstimmt. Des Weiteren ist jedes D_g dicht, da man für jede Funktion $f \in \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ eine Zahl $n \in \omega$ findet, welche noch nicht im Definitionsbereich von f ist, da dieser endlich ist. So kann man f so zu $f \leq \tilde{f} \in \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ erweitern, dass $\tilde{f}(n) = 1 - g(n)$ gilt. Mit einer ähnlichen Argumentation sieht man, dass für $n \in \omega$ auch die Menge $D_n = \{f \in \mathrm{Fn}(\omega, 2) \mid n \in \mathrm{dom}(f)\}$ eine dichte Oberhalb-Menge ist.

Betrachte nun die Familie $\mathcal{D} = \{D_g \mid g \in {}^\omega 2\} \cup \{D_n \mid n \in \omega\}$ mit $|\mathcal{D}| = |{}^\omega 2| = \mathfrak{c}$. Wir nehmen per Widerspruch an, es existiere ein $\mathcal{D}$-generischer Filter $G \subseteq \mathrm{Fn}(\omega, 2)$. Wie in 1.14 bereits gesehen ist für einen Filter die Funktion $f_G = \bigcup G$ wohldefiniert. Da G ein $\mathcal{D}$-generischer Filter ist gilt ausserdem: Für jedes $n \in \omega$ gilt $G \cap D_n \neq \emptyset$ und damit $\mathrm{dom}(f_G) = \omega$. Gleichzeitig gilt jedoch für jedes $g \in {}^\omega 2$ dass $G \cap D_g \neq \emptyset$ und somit $g \neq f_G$. Das ist unmöglich. □

3 Schwächere Formen von MA

Es gibt schwächere Formen von MA. Dafür zuerst ein paar weitere Definitionen. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine partialgeordnete Menge.

Definition 3.1. Eine Teilmenge $Q \subseteq P$ heisst **zentriert**, falls jede endliche Teilmenge von Q eine obere Schranke in P besitzt (d.h. für $\{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq Q$ existiert $p \in P$ mit $p \geq q_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Definition 3.2. $\mathbb{P}$ heisst

- **abzählbar**, falls P abzählbar ist.
- **σ-zentriert**, falls P eine abzählbare Vereinigung von zentrierten Mengen ist.

Beispiel 3.3. Jede abzählbare Menge P ist σ-zentriert: Da $\leq$ reflexiv ist, ist jede einelementige Menge zentriert. Schreibe also P als Vereinigung von einelementigen Mengen.

Beispiel 3.4. Seien I, J Mengen mit $|I|, |J| \geq 2$. Eine Teilmenge Q von $\mathrm{Fn}(I, J)$ ist zentriert, falls alle Funktionen in Q kompatibel sind. Jeder Funktion $F \colon I \to J$ können wir den Filter

$$[F] := \{f \in \mathrm{Fn}(I, J) \mid f \leq F\}$$

zuweisen. Nach Bsp 1.7 ist dann $\bigcup[F] = F$. Umgekehrt gibt es zu jedem maximalen Filter[3] eine solche Funktion. Jede Funktion $f \in \mathrm{Fn}(I, J)$ ist in mindestens einem maximalen Filter enthalten (erweitere z.B. f zu F mit einer konstanten Funktion, dann ist $f \in [F]$).

Daraus folgt:

I ist endlich und J ist abzählbar $\iff$ Es gibt höchstens abzählbar viele Funktionen $F \colon I \to J \implies \mathrm{Fn}(I, J)$ ist σ-zentriert.

Lemma 3.5. *Jede σ-zentrierte Menge erfüllt* ccc.

Beweis. Bemerke zuerst, dass jede Antikette in einer zentrierten Menge maximal ein Element haben kann. Denn für zwei Elemente einer zentrierten Menge gibt es eine gemeinsame obere Schranke und damit sind sie kompatibel.

Sei $P = \bigcup_{n\in\omega} P_n$ σ-zentriert, wobei P_n für $n \in \omega$ zentriert ist. Sei weiterhin $A \subseteq P$ eine Antikette. Nun ist für jedes $n \in \omega$ die Menge $A \cap P_n$ eine Antikette in der zentrierten Menge P_n und aus der Bemerkung folgt damit $|A \cap P_n| \leq 1$. Folglich ist A abzählbar. $\square$

Sei nun $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von partiell geordneten Mengen, z.B. $\mathcal{P} = ccc$, σ-zentriert oder abzählbar. Dann definieren wir folgende Aussage:

Aussage 3.6 ($\mathsf{MA}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$)**.** *Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, welche $\mathcal{P}$ erfüllt und sei $\mathcal{D}$ eine Familie aus weniger als $\mathfrak{c}$ dichten Oberhalb-Mengen von P. Dann gibt es einen $\mathcal{D}$-generischen Filter auf $\mathbb{P}$.*

$\mathsf{MA}(ccc)$ ist somit die normale Form von Martins Axiom. Beispiel 3.3 und Lemma 3.5 geben uns ausserdem folgende Implikationskette:

$$\mathsf{MA}(ccc) \implies \mathsf{MA}(\sigma\text{-zentriert}) \implies \mathsf{MA}(\text{abzählbar}).$$

[3] D.h. ein Filter, zu dem kein weiteres Element mehr hinzugefügt werden kann.