Konsequenzen des Martin-Axioms: Existenz von Ramsey Ultrafiltern und Existenz von Magic Sets

Olga Kolotuhina und Michele Reho

April 2020

1 Wiederholung

Martins Axiom MA. Für jede partielle Ordnung $(P, \leq)$, welche nur abzählbare Antiketten (ccc = countable chain condition) besitzt, und für jede Menge $\mathscr{D}$ aus offenen dichten Teilmengen in P mit $|\mathscr{D}| < \mathfrak{c}$ existiert ein $\mathscr{D}$-generischer Filter auf P.

MA($\mathcal{P}$). Für jede partielle Ordnung $(P, \leq)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{P}$ und für jede Menge $\mathscr{D}$ aus offenen dichten Teilmengen in P mit $|\mathscr{D}| < \mathfrak{c}$ existiert ein $\mathscr{D}$-generischer Filter auf P.

Wobei $\mathcal{P}$ = ccc, $\mathcal{P}$ = σ-zentriert oder $\mathcal{P}$ = abzählbar.

Fakt. **MA** $\implies$ **MA**(σ-zentriert) $\implies$ **MA**(abzählbar)

Definition (Ultrafilter)**.** Ein Filter $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ist ein Ultrafilter, wenn für alle $x \subseteq \omega$ entweder $x \in \mathscr{F}$ oder $\omega \setminus x \in \mathscr{F}$ gilt.

Ultrafilter Theorem. Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Filter, dann kann $\mathscr{F}$ zu einem Ultrafilter $\mathscr{U}$ erweitert werden, d.h. es gibt einen Ultrafilter $\mathscr{U} \subseteq P(S)$, so dass $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$.

2 Ultrafilter und Ramsey Ultrafilter

Definition (Fréchet Filter)**.** $F_0 = \{x \subseteq \omega : \omega \setminus x \text{ ist endlich}\}$

Definition (Freier Filter)**.** Ein Filter $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein freier Filter, wenn er den Fréchet Filter enthält.

Definition (Ramsey Ultrafilter)**.** Ein freier Ultrafilter $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein Ramsey Ultrafilter, wenn für jede Färbung $\pi : [\omega]^2 \to 2$ ein homogenes $x \in \mathscr{U}$ gibt, d.h. $\pi|_{[x]^2}$ ist konstant.

Definition (Starke endliche Durchschnittseigenschaft)**.** Eine Familie $\mathscr{F}$ hat die starke endliche Durchschnittseigenschaft(*sfip* = strong finite intersection property), wenn jede endliche Unterfamilie einen unendlichen Durchschnitt besitzt.

Korollar 2.1. Sei $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(S)$ eine Familie von Teilmengen aus S mit *sfip*, dann kann $\mathscr{G}$ zu einem Ultrafilter $\mathscr{U}$ erweitert werden.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für eine schwächere Annahme. Sei $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(S)$ eine Familie von Teilmengen aus S mit der endlichen Durchschnittseigenschaft (*fip*), d.h. jede endliche Unterfamilie hat eine nicht leere Durchschnittsmenge. Wir definieren

$$\mathscr{F} = \{X \subseteq S : \text{es gibt ein } n \in \omega \text{ und } X_1, ..., X_n \in \mathscr{G}, \text{ so dass } X_1 \cap ... \cap X_n \subseteq X\}.$$

Dann ist $\mathscr{F}$ ein Filter, so dass $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Aufgrund des Ultrafilter Theorems gibt es einen Ultrafilter $\mathscr{U}$, welcher den Filter $\mathscr{F}$ erweitert.
Dieser Beweis stammt aus Hrbacek und Jech [1, Chapter 11, Lemma 1.7, p. 202-203]. □

Proposition 2.1. Sei $\mathscr{U}$ ein freier Ultrafilter, dann ist $\mathscr{U}$ ein Ramsey Ultrafilter genau dann wenn für jede unendliche Partition $\{u_i \subseteq \omega : i \in \omega\}$ von ω gilt: entweder ist $u_i \in \mathscr{U}$ für ein (eindeutiges) $i \in \omega$ oder es gibt ein $x \in \mathscr{U}$, so dass für jedes $i \in \omega$, $|x \cap u_i| \leq 1$.

Bemerkung. Den Beweis der Proposition findet man in Halbeisen [2, Proposition 11.7, p. 264]. In vielen Büchern wird die äquivalente Aussage als Definition für Ultrafilter benutzt.

3 Existenz von Ramsey Ultrafiltern

Proposition 3.1. **MA**(abzählbar) $\Longrightarrow$ es gibt $2^{\mathfrak{c}}$ paarweise nicht isomorphe Ramsey Ultrafilter.

Idee des Beweises. Um $2^{\mathfrak{c}}$ nicht isomorphe Ramsey Ultrafilter zu finden, reicht es $2^{\mathfrak{c}}$ unterschiedliche Ramsey Ultrafilter zu finden, da es nur $\mathfrak{c}$ Permutationen von ω hat. Wir nutzen die transitive Induktion um die $2^{\mathfrak{c}}$ unterschiedlichen Ramsey Ultrafilter zu finden. Für alle $\gamma : \mathfrak{c} \to 2$ und für alle $\alpha \in \mathfrak{c}$ bilden wir eine Menge

$$\mathscr{F}_{\gamma|\alpha} = \left\{ x_{\beta,\gamma(\beta)} : \beta \in \alpha \right\} \subseteq [\omega]^{\omega}$$

mit *sfip*, so dass der Filter, welcher durch $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{c}} \mathscr{F}_{\gamma|\alpha}$ generiert wird, ein Ramsey Ultrafilter ist. Ausserdem müssen wir sicher stellen, dass für unterschiedliche $\gamma, \gamma' \in {}^{\mathfrak{c}}2$ unterschiedliche Ramsey Ultrafilter generiert werden.

Um zu zeigen, dass man Ramsey Ultrafilter gebildet hat, nutzen wir die Proposition 2.1. Wir zeigen nämlich, dass für jede unendliche Partition $\{Y_n : n \in \omega\}$ von ω es entweder ein $n_0 \in \omega$ gibt, so dass $Y_{n_0} \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{c}} \mathscr{F}_{\gamma|\alpha}$ oder es hat ein $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{c}} \mathscr{F}_{\gamma|\alpha}$, so dass für alle $n \in \omega$, $|x \cap Y_n| \leq 1$ gilt.

Beweis. Sei $\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ die Menge aller unendlichen partiellen Partitionen von ω, das heisst für jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$, ist $\mathscr{P}_\alpha = \{Y_n^\alpha : n \in \omega\}$ eine Menge aus paarweise disjunkten Teilmengen von ω, so dass $\bigcup \mathscr{P}_\alpha = \omega$.

Wir definieren $x_{0,0} := \{2n : n \in \omega\}$ und $x_{0,1} := \{2n+1 : n \in \omega\}$ und für $\delta \in \{0,1\}$ sei $\mathscr{F}_{\{\langle 0,\delta\rangle\}} := \{x_{0,\delta}\} \cup \{x \subseteq \omega : |\omega \setminus x| < \omega\}$.

Es gilt, dass $\mathscr{F}_{\{\langle 0,\delta\rangle\}}$ für $\delta \in \{0,1\}$ *sfip* besitzt.

Sei $\alpha \in \mathfrak{c}$, wir nehmen an, dass für jedes $\eta \in {}^{\alpha}2$ und jedes $\beta \in \alpha$ bereits die folgende Menge konstruiert hätten: $\mathscr{F}_{\eta|\beta} = \{x_{\iota,\eta(\iota)} : \iota \in \beta\}$, welche die *sfip* erfüllen, so dass für alle $\beta_0 \in \beta_1 \in \alpha$ gilt $\mathscr{F}_{\eta|\beta_0} \subseteq \mathscr{F}_{\eta|\beta_1}$. Nun konstruieren wir die Menge $\mathscr{F}_\eta$, hier gibt es zwei Fälle:

Fall 1. α ist eine Limesordinalzahl (limit ordinal): In diesem Fall definieren wir

$$\mathscr{F}_\eta = \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathscr{F}_{\eta|\beta}.$$

Die Menge $\mathscr{F}_\eta$ besitzt *sfip*, da alle $\mathscr{F}_{\eta|\beta}$ aufsteigend sind und *sfip* haben.

Fall 2. α ist eine Nachfolgerordinalzahl (successor ordinal): In diesem Fall ist $\alpha = \beta_0 + 1$, dann schauen wird uns $\mathscr{P}_{\beta_0} = \{Y_n : n \in \omega\}$ an. Wir haben folgende zwei Fälle:

Fall 2.1. Es gibt $n_0 \in \omega$, so dass $\mathscr{F}_{\eta|\beta_0} \cup \{Y_{n_0}\}$ *sfip* hat. Sei $P_1 = Fn(Y_{n_0}, 2)$ die Menge aller Funktionen p, so dass $\mathrm{dom}(p)$ eine endliche Teilmenge von Y_{n_0} ist und $\mathrm{ran}(p) \subseteq 2$ und für $p, q \in P_1$ sei eine partielle Ordnung definiert durch $p \leq q \iff p \subseteq q$. Dann ist $(P_1, \leq)$ abzählbar und für jede endliche Menge $E \in \mathrm{fin}(\beta_0)$, jedes $n \in \omega$ und für jedes $\delta \in \{0, 1\}$ ist die Menge

$$D_{E,n,\delta} = \left\{ p \in P_1 : \left| p^{-1}(\delta) \cap \bigcap_{\iota \in E} x_{\iota,\eta(\iota)} \right| \geq n \right\}$$

eine offene dichte Teilmenge von P_1. Sei nun

$$\mathscr{D} = \{D_{E,n,\delta} : E \in \mathrm{fin}(\beta_0) \wedge n \in \omega \wedge \delta \in \{0, 1\}\}.$$

Dann gilt: $|\mathscr{D}| \leq \max(|\alpha|, \omega) < \mathfrak{c}$. Aus dem **MA**(abzählbar) folgt, dass ein $\mathscr{D}$-generischer Filter G auf P_1 existiert. Für $\delta \in \{0, 1\}$ sei

$$x_{\beta_0,\delta} := \bigcup \left\{ p^{-1}(\delta) : p \in G \right\}.$$

Für $\delta \in \{0, 1\}$ ist $x_{\beta_0,\delta} \in [Y_{n_0}]^\omega$ und $\mathscr{F}_\eta := \mathscr{F}_{\eta|\beta_0} \cup \left\{ x_{\beta_0,\eta(\beta_0)} \right\}$ hat *sfip*. Schliesslich, seien $\eta, \eta' \in {}^\alpha 2$, so dass $\eta(\beta_0) = 1 - \eta'(\beta_0)$. Da $x_{\beta_0,1} \cap x_{\beta_0,1} = \emptyset$ gilt,folgt daraus, dass $\mathscr{F}_\eta \neq \mathscr{F}_{\eta'}$. Ausserdem fehlt der Menge $\mathscr{F}_\eta \cup \mathscr{F}_{\eta'}$ *sfip*, deshalb gibt es keinen Ultrafilter, welches $\mathscr{F}_\eta$ und $\mathscr{F}_{\eta'}$ erweitern kann.

Fall 2.2. Wenn für jedes $n \in \omega$ gilt, dass Y_n zum dualen Ideal von $\mathscr{F}_{\eta|\beta_0}$ gehört, dann ist jede endliche Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{F}_{\eta|\beta_0}$ in unendlich vielen Mengen aus $\mathscr{P}_{\beta_0}$ enthalten. Sei $P_2 \subset Fn(\omega, 2)$, so dass $p \in P_2$ genau dann wenn für jedes $Y \in \mathscr{P}_{\beta_0}$ gilt:

$$\max\left\{ |p^{-1}(0) \cap Y|, |p^{-1}(1) \cap Y| \right\} \leq 1$$

und für $p, q \in P_2$ sei eine partielle Ordnung definiert durch $p \leq q \iff p \subseteq q$. Dann ist $(P_2, \leq)$ abzählbar und für jede endliche Menge $E \in \mathrm{fin}(\beta_0)$, jedes $n \in \omega$ und jedes $\delta \in \{0, 1\}$ ist die Menge

$$D_{E,n,\delta} = \left\{ p \in P_2 : \left| p^{-1}(\delta) \cap \bigcap_{\iota \in E} x_{\iota,\eta(\iota)} \right| \geq n \right\}$$

eine offene und dichte Teilmenge von P_2. Sei

$$\mathscr{D} := \{D_{E,n,\delta} : E \in \operatorname{fin}(\beta_0) \wedge n \in \omega \wedge \delta \in \{0,1\}\}$$

und sei G ein $\mathscr{D}$-generischer Filter auf P_2. Schliesslich sei

$$x_{\beta_0,\delta} := \bigcup \left\{p^{-1}(\delta) : p \in G\right\}.$$

Dann hat $\mathscr{F}_\eta := \mathscr{F}_{\eta|\beta_0} \cup \left\{x_{\beta_0,\eta(\beta_0)}\right\}$ *sfip* und ausserdem ist $x_{\beta_0,\eta(\beta_0)}$, so dass für alle $n \in \omega$, $|x_{\beta_0,\eta(\beta_0)} \cap Y_n| \leq 1$. Es gilt für $\eta, \eta' \in {}^{\alpha}2$ mit $\eta(\beta_0) = 1 - \eta'(\beta_0)$, dass kein Ultrafilter $\mathscr{F}_\eta$ und $\mathscr{F}_{\eta'}$ erweitern kann.

Schliesslich, sei $\mathscr{F}_\gamma$, für jedes $\gamma \in {}^{\mathfrak{c}}2$, der von der Menge $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{c}} \mathscr{F}_{\gamma|\alpha}$ generierte Filter. Es gilt für verschiedene $\gamma, \gamma' \in {}^{\mathfrak{c}}2$, dass $\mathscr{F}_\gamma$ und $\mathscr{F}_{\gamma'}$ zwei unterschiedliche Ramsey Ultrafilter sind und somit existieren $2^{\mathfrak{c}}$ paarweise nicht isomorphe Ramsey Ultrafilter. $\square$

4 Magische Mengen

Definition. Sei $\mathcal{H} \subset {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist eine **magische Menge** für die Familie $\mathcal{H}$ wenn für alle Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$ und alle Funktionen $f, g \in \mathcal{H}$ gilt, dass

$$g[M] \subset f[M] \Rightarrow f = g$$

Wir wollen zeigen, dass aus **MA**(σ-zentriert) folgt, dass $2^{\mathfrak{c}}$ paarweise verschiedene magische Mengen für die Familie aller symmetrischen, lokal beschränkten, nirgends konstanten Funktionen (s.l.b.n.k.) existieren. Ausserdem zeigen wir, dass diese magischen Mengen eine gewisse Stabilität besitzen: Sie können nicht zerstört werden, indem wir abzählbare Mengen hinzufügen oder entfernen.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist **symmetrisch**, falls gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} = f(x). \tag{1}$$

Lemma 4.1. Die Menge aller symmetrischen Funktionen ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren und (punktweiser) Addition.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und seien f und g zwei symmetrische Funktionen. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\lambda f(x+h) + \lambda f(x-h)}{2} = \lambda \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} = \lambda f(x),$$

sowie

$$\begin{aligned} &\lim_{h \downarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) + (f+g)(x-h)}{2} \\ =&\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} + \lim_{h \downarrow 0} \frac{g(x+h) + g(x-h)}{2} = f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist **lokal beschränkt**, falls für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von x existiert, so dass $f|_U$ beschränkt ist.

Lemma 4.2. Die Menge aller lokal beschränkten Funktionen ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren und (punktweiser) Addition.

Beweis. Sei λ ein Skalar und seien f und g zwei lokal beschränkte Funktionen. Sei x ein beliebiger Punkt in $\mathbb{R}$ und seien U, bzw. U' zwei Umgebungen von x, so dass f und g auf U, bzw. U' beschränkt sind durch die Konstanten M, bzw. M'. Dann ist λf auf der Umgebung U von x beschränkt durch λM und $(f+g)$ auf der Umgebung $U \cap U'$ von x beschränkt durch $M + M'$.

Lemma 4.3. Seien g und h zwei symmetrische, lokal beschränkte Funktionen in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ und sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$g|_D = h|_D \iff g = h. \tag{2}$$

Beweis.

($\Longleftarrow$) $g = h$ impliziert $g|_D = h|_D$ nach Definition.

($\Longrightarrow$) Sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und seinen g und h zwei verschiedene symmertrische, lokal beschränkte Funktionen, so dass $g|_D = h|_D$ gilt. Sei nun $\hat{f} := g - h$ und sei $f := \alpha \hat{f}$, wobei $\alpha \in \{-1, 1\}$ so gewählt ist, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) > 0$. Nach Lemma 4.1 und Lemma 4.2 ist f wieder eine symmetrische, lokal beschränkte Funktion. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges, offenes Intervall, welches x_0 enthält. Wir zeigen nun per Induktion, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $z_m \in I$ exisitiert, so dass $f(z_m) > \frac{m}{2} f(x_0)$ gilt.

$(m = 1)$ Wähle $z_1 := x_0 \in I$

$(m \to m+1)$ Sei $z_m \in I$, so dass $f(z_m) > \frac{m}{2} f(x_0)$ gilt. Wir wählen nun eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ und $z_m + h_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten

$$\frac{m}{2} f(x_0) < f(z_m) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (f(z_m + h_n) + f(z_m - h_n)) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} f(z_m - h_n),$$

wobei wir für die erste Gleichung verwenden, dass f symmetrisch ist und für die zweite Gleichung, dass $z_m + h_n$ immer in D liegt, und f auf D gleich 0 ist, da $f = \alpha(g - h)$ und nach Annahme $g|_D = h|_D$ gilt.
Es existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(z_m - h_{n_0}) > mf(x_0) > \frac{m+1}{2} f(x_0)$ und wir können $z_{m+1} := z_m - h_{n_0}$ definieren.

Wir haben gezeigt dass f auf I nicht beschränkt ist und f somit nicht lokal beschränkt sein kann. Dies steht in Widerspruch zu unserer Annahme.

Korollar 4.1. Die Familie aller symmetrischen, lokal beschränkten Funktionen in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ hat Kardinalität $\mathfrak{c}$.

Beweis. Verwende Lemma 4.3 mit $D = \mathbb{Q}$.

Korollar 4.2. Seien f und g symmetrische, lokal beschränkte Funktionen. Falls $f \neq g$, dann existiert ein nichtleeres, offenes Intervall $I \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) \neq g(x)$, für alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Angenommen, es gäbe für jedes offene, nicht-leere Intervall $I \in \mathbb{R}$ ein $x \in I$, so dass $f(x) = g(x)$. Die Vereinigung aller offenen, nichtleeren Intervalle bildet eine dichte Teilmenge D von $\mathbb{R}$, für die $f|_D = g|_D$. Nach Lemma 4.3 haben wir also $f = g$.

Definition. Wir definieren $\mathcal{F} \subset {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ als die Menge aller symmetrischen, lokal beschränkten, nirgends konstanten (s.l.b.n.k.) Funktionen.

Definition. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heisst **nirgends dicht** in $\mathbb{R}$, falls das Innere des Abschlusses von D leer ist.

Lemma 4.4. Sei $f \in \mathcal{F}$. Dann ist die Menge $f^{-1}(\{x\})$ nirgends dicht für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{F}$. Angenommen es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ und ein nicht-offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass

$$I \setminus \overline{f^{-1}(\{x\})} = \emptyset.$$

Indem wir in Lemma 4.3 $\mathbb{R}$ durch das Intervall I ersetzen und für f unser f und für g die konstante Funktion verwenden die alles auf x abbildet, erhalten wir dass auch f auf I konstant sein muss. Dies steht in Widerspruch zu unserer Annahme, dass f nirgends konstant ist.

Definition. Sei $\mathcal{H} \subset {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist eine **stark magische** Menge für die Familie $\mathcal{H}$ genau dann wenn für alle $f, g \in \mathcal{H}$ und alle Teilmengen Y_0, Y_1 von $\mathbb{R}$ mit Kardinalität kleiner als $|M|$ gilt, dass

$$g[(M \setminus Y_0) \cup Y_1] \subset f[(M \setminus Y_0) \cup Y_1] \Rightarrow f = g. \tag{3}$$

Definition. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heisst **mager** in $\mathbb{R}$, wenn sie die abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.

Definition. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heisst **nirgends mager** in $\mathbb{R}$, falls für jede nicht-leere offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ gilt, dass $D \cap U$ nicht mager ist.

Definition. Wir definieren $\mathscr{M}$ als die Kollektion aller mageren Teilmengen von ${}^{\omega}\omega$.

Definition. Die **Additivität** einer Familie S, geschrieben **add(S)**, ist die kleinste Anzahl Mengen in S, deren Vereinigung nicht mehr in S liegt, formaler

$$add(S) = min\{|A| : A \subset S \wedge \bigcup A \notin S\}$$

Es folgt noch ein Lemma, welche unseren Existenzbeweis für magische Mengen im nächsten Kapitel auf das Martin Axiom zurückführt. Der Beweis dieses Lemmas würde hier aber den Rahmen sprengen und wir verweisen dafür auf Kunen [4, Chapter II, Theorem 2.20].

Lemma 4.5. Aus **MA**(σ-zentriert) folgt $add(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$.

5 Existenz von Magischen Mengen

Theorem 5.1. Angenommen $add(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$. Sei N eine nirgends magere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann enthält N $2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ paarweise verschiedene stark magische Mengen für die Familie $\mathcal{F}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass N $2^{\mathfrak{c}}$ paarweise verschiedene magische Mengen enthält, zu denen wir eine Menge von Kardinalität kleiner $\mathfrak{c}$ hinzufügen oder entfernen können ohne sie zu zerstören. Sei $\mathcal{C} := \{\langle f, g\rangle \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | f \neq g\}$. Nach Korollar 4.1 wissen wir, dass $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$. Für jede Funktion $\gamma \in {}^{\mathfrak{c}}2$ konstruieren wir eine magische Menge $M_\gamma \subset N$ mit transfiniter Induktion. Sei nun $\alpha \in \mathfrak{c}$. Angenommen wir hätten für jedes $\beta \in \alpha$ schon ein m^0_β und m^1_β konstruiert. Nach Korollar 4.2 existiert ein nichtleeres offenes Intervall $I_\alpha \subset \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in I_\alpha : f_\alpha(x) \neq g_\alpha(x)$. Wir teilen nun I_α in zwei disjunkte Intervalle I^0_{alpha} und I^1_{alpha} mit nichtleeren Inneren. Jetzt wählen wir $m^0_\alpha \in \mathbb{R}$ und $m^1_\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Bedigungen erfüllt sind für jedes $\delta \in 2$:

$(1)_\alpha$ $m^\delta_\alpha \in I^\delta_\alpha \cap N$

$(2)_\alpha$ $m^\delta_\alpha \notin \bigcup_{\beta\in\alpha} f^{-1}_\beta(\{g_\beta(m^0_\beta)\}) \cup \bigcup_{\beta\in\alpha} f^{-1}_\beta(\{g_\beta(m^1_\beta)\}) =: A$

$(3)_\alpha$ $m^\delta_\alpha \notin \bigcup_{\beta\in\alpha} g^{-1}_\beta(\{f_\beta(m^0_\beta)\}) \cup \bigcup_{\beta\in\alpha} g^{-1}_\beta(\{f_\beta(m^1_\beta)\}) =: B$

$(4)_\alpha$ $m^\delta_\alpha \notin \bigcup_{\beta\in\alpha} g^{-1}_\beta(\{g_\beta(m^0_\beta)\}) \cup \bigcup_{\beta\in\alpha} g^{-1}_\beta(\{g_\beta(m^1_\beta)\}) =: C$

$(5)_\alpha$ ${}^\delta_\alpha \notin \bigcup_{\beta\in\alpha}\{m^0_\beta\} \cup \bigcup_{\beta\in\alpha}\{m^1_\beta\} =: D$

m^0_α und m^1_α existieren, da A,B,C und D alles Vereinigungen von weniger als $\mathfrak{c}$ mageren Mengen sind nach Lemma 4.4. Da wir $add(\mathscr{M} = \mathfrak{c}$ angenommen haben, sind A,B,C und D auch mager. Da N nirgends mager ist, erhalten wir, dass $(N \cap I^\delta_\alpha) \setminus (A \cup B \cup C \cup D)$ nicht leer ist für jedes $\delta \in 2$.
Für jedes $\gamma \in {}^{\mathfrak{c}}2$, sei $M_\gamma := \{m^{\gamma(\alpha)}_\alpha | \alpha \in \mathfrak{c}\} \subset N$. Nach Konstruktion gilt $M_\gamma \neq M'_\gamma$ für alle $\gamma, \gamma' \in {}^{\mathfrak{c}}2$ mit $\gamma \neq \gamma'$. Also gibt es $2^{\mathfrak{c}} = |\ {}^{\mathfrak{c}}2|$ paarweise verschiedene Mengen M_γ. Sei nun $\gamma \in {}^{\mathfrak{c}}2$ und seien Y_0 und Y_1 zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit Kardinalität kleiner als $\mathfrak{c}$.

Behauptung 1: Für jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$ gilt, dass $g_\alpha(m^{\gamma(\alpha)}_\alpha) \notin f_\alpha[M_\gamma]$.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathfrak{c}$. Angenommen es gäbe ein $m^{\gamma(\beta)}_\beta \in M_\gamma$, mit

$$g_\alpha(m^{\gamma(\alpha)}_\alpha) = f_\alpha(m^{\gamma(\beta)}_\beta). \tag{4}$$

Dann tritt einer von drei möglichen Fällen ein:

Fall 1: $\alpha = \beta$ Dann ist $g_\alpha(m_\alpha^{\gamma(\alpha)}) = f_\alpha(m_\alpha^{\gamma(\alpha)})$, also wäre $m_\alpha^{\gamma(\alpha)} \notin I_\alpha$. Dies steht in Widerspruch zu $(1)_\alpha$.

Fall 2: $\alpha \in \beta$ Nach (4) hätten wir $m_\beta^{\gamma(\beta)} \in f_\alpha^{-1}(\{g_\alpha(m_\alpha^{\gamma(\alpha)})\})$. Dies steht in Widerspruch zu $(2)_\alpha$.

Fall 3: $\beta \in \alpha$ Nach (4) hätten wir $m_\alpha^{\gamma(\alpha)} \in g_\alpha^{-1}(\{f_\alpha(m_\beta^{\gamma(\beta)})\})$. Dies steht in Widerspruch zu $(3)_\alpha$.

Da alle drei Fälle zu einem Widerspruch führen, muss unsere Annahme falsch sein und somit $g_\alpha(m_\alpha^{\gamma(\alpha)}) \notin f_\alpha[M_\gamma]$ gelten.

Behauptung 2: Für jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$ gilt, dass $g_\alpha[(M_\gamma \setminus Y_0) \cup Y_1] \not\subset f_\alpha[(M_\gamma \setminus Y_0) \cup Y_1]$.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathfrak{c}$. Für jedes $k \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ existiert ein eindeutiges $\epsilon_k \in \mathfrak{c}$, so dass $\langle kf_\alpha, kg_\alpha\rangle = \langle f_{\epsilon_k}, g_{\epsilon_k}\rangle$. Wir definieren $m_k := m_{\epsilon_k}^{\gamma(\epsilon_k)}$. Seien $k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k \neq l$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\epsilon_k \in \epsilon_l$. Dann haben wir nach $(4)_{\epsilon_l}$, dass $(lg_\alpha)(m_l) \neq (lg_\alpha)(m_k)$ und damit auch $g_\alpha(m_l) \neq g_\alpha(m_k)$. Also hat die Menge $\{g_\alpha(m_k) | k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ Kardinalität $\mathfrak{c}$ und es existiert ein $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$g_\alpha(m_l) \in \{g_\alpha(m_k) | k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \setminus (f_\alpha[Y_1] \cup g_\alpha[Y_0]),$$

da $|f_\alpha[Y_1]| \leq |Y_1| < \mathfrak{c}$ und $|g_\alpha[Y_0]| \leq |Y_0| < \mathfrak{c}$. Nach Behauptung 1 ist aber $g_\alpha(m_l) \notin f_\alpha[M_\gamma]$ für jedes $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also gilt

$$g_\alpha(m_l) \notin f_\alpha[M_\gamma \setminus Y_0] \cup f_\alpha[Y_1] = f_\alpha[(M_\gamma \setminus Y_0) \cup Y_1].$$

Weil aber $g_\alpha(m_l) \in g_\alpha[Y_0]$, erhalten wir, dass

$$g_\alpha(m_l) \in g_\alpha[(M_\gamma \setminus Y_0) \cup Y_1].$$

Also ist die Menge $M_\gamma \subset N$ stark magisch für jede Funktion $\gamma \in {}^{\mathfrak{c}}2$.

Korollar 5.1. Angenommen, es gilt $add(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$. Dann gibt es $2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$, paarweise verschiedene, stark magische Mengen für die Famillie $\mathcal{F}$.

Beweis. Verwende Theorem 5.1 mit $N = \mathbb{R}$

Literatur

[1] K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded*. CRC Press, 1999.

[2] L. J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory: With a Gentle Introduction to Forcing (2nd. ed.)*. Springer-Verlag London, 2017.

[3] L. Halbeisen, M. Lischka, S. Schumacher, *et al.*, “Magic sets,” *Real Analysis Exchange*, vol. 43, no. 1, pp. 187–204, 2018.

[4] K. Kunen, *Set theory an introduction to independence proofs*. Elsevier, 2014.