

Definition 1. Eine binäre Relation " $\leq$ " auf einer Menge P ist eine **partielle Ordnung/Halbordnung** von P , wenn sie transitiv (d.h. $p \leq q$ und $q \leq r$ impliziert $p \leq r$), reflexiv (d.h., $p \leq p$ für jedes $p \in P$) und anti-symmetrisch (d.h. $p \leq q$ und $q \leq p$ impliziert $p = q$) ist. Wenn " $\leq$ " eine partielle Ordnung auf P ist, so wird $(P, \leq)$ eine **partiell geordnete/halbgeordnete Menge** genannt.

Wenn $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge ist, dann definieren wir $p < q \Leftrightarrow p \leq q \wedge p \neq q$, und nennen $(P, <)$ partiell geordnet im **strikten Sinn** (ersetze Reflexivität durch $p \not\leq p$ für jedes $p \in P$).

Definition 2. Zwei verschiedene Elemente $p, q \in P$, wobei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge ist, werden **vergleichbar** genannt, wenn entweder $p < q$ oder $q < p$ gilt; ansonsten werden sie **unvergleichbar** genannt. Bemerke, dass wir für $p, q \in P$ haben könnten, dass gilt $p \not\leq q$ genauso wie $p \not\geq q$.

Definition 3. Wenn wir für beliebige Elemente p und q von einer partiell geordneten Menge $(P, <)$ $p < q$, $p = q$ oder $p > q$ (wobei diese drei Fälle gleichzeitig exklusiv sind) haben, dann wird P **linear geordnet** durch die **lineare Ordnung** " $<$ " genannt. Zwei Elemente p_1 und p_2 von P werden **kompatibel** genannt, falls ein $q \in P$ existiert, so dass $p_1 \leq q \leq p_2$ gilt; ansonsten werden sie **unkompatibel** genannt, dargestellt durch $p_1 \perp p_2$.

Definition 4. Sei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge. Dann wird $p \in P$ **maximal** (" $<$ -maximal) in P genannt, falls kein $x \in P$ existiert mit $p < x$. Ähnlich wird $q \in P$ **minimal** (" $<$ -minimal) in P genannt, falls kein $x \in P$ existiert mit $x < p$. Ausserdem gilt für eine nicht-leere Menge $C \subseteq P$, dass ein Element $p' \in P$ **obere Schranke** von C genannt wird, falls für alle $x \in C$ folgendes gilt: $x \leq p'$.

Definition 5. Eine nicht-leere Menge $C \subseteq P$, wobei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge ist, ist eine **Kette** in P , wenn C linear geordnet ist durch " $<$ " (d.h. für alle verschiedenen $p, q \in C$ haben wir entweder $p < q$ oder $p > q$). Umgekehrt, falls $A \subseteq P$ ist so, dass beliebige zwei verschiedene Elemente von A unvergleichbar sind (d.h. weder $p < q$ noch $p > q$), dann wird A eine **Anti-Kette** genannt. Ausserdem ist $A \subseteq P$ eine **maximale Anti-Kette** in P , falls A eine Anti-Kette in P ist und A maximal mit dieser Eigenschaft ist. Bemerke, dass wenn $A \subseteq P$ eine maximale Anti-Kette ist, dann ist für jedes $p \in P \setminus A$ ein $q \in A$, so dass p und q kompatibel sind.

Definition 6. Sei $(P, <)$ eine linear geordnete Menge. Dann ist " $<$ " eine **Wohlordnung** auf P , wenn jede nicht-leere Teilmenge von P ein minimales Element hat. Ausserdem wird eine Menge P **wohl-geordnet** genannt, wenn eine Wohlordnung auf P existiert.

Definition 7. Einer Familie $\mathcal{F}$ von Mengen wird gesagt, dass sie **endlichen Charakter** hat, wenn für jede Menge x gilt: $x \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{fin}(x) \subseteq \mathcal{F}$ (d.h., jede endliche Teilmenge von x gehört zu $\mathcal{F}$).

Theorem 3.7 (Transfinite Recursion Theorem). Sei F eine Klassenfunktion, welche für alle Mengen definiert ist. Dann gibt es eine eindeutige Funktion G definiert auf Ω , so dass für alle $\alpha \in \Omega$ gilt: $G(\alpha) = F(G|_\alpha)$, wobei $G|_\alpha = \{\langle \beta, G(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}$.

Theorem 3.21 (Hartog's Theorem). Für jedes Kardinal $\mathfrak{m}$ gibt es ein kleinstes Aleph, bezeichnet mit $\aleph(\mathfrak{m})$, so dass $\aleph(\mathfrak{m}) \not\leq \mathfrak{m}$.

Korollar 3.22. Für jede Ordinalzahl α gibt es eine Ordinalzahl β , so dass $|\beta| > |\alpha|$. Ebenso, für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ gibt es eine Ordinalzahl β , so dass $|\beta| \not\leq \mathfrak{m}$.

Das Auswahlaxiom



Sämtliche Definitionen sowie auch Beweisideen, welche in den folgenden Beweisen verwendet werden, stammen aus dem Buch "Combinatorial Set Theory" von Lorenz J. Halbeisen.

Die gelisteten Definitionen werden nicht alle zum Tragen kommen, jedoch sind diese wichtig für spätere Beweise.

Thm 6.1: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Auswahlaxiom:

$$\forall \mathcal{F} (\emptyset \notin \mathcal{F} \rightarrow \exists f (f \in {}^{\mathcal{F}}U \mathcal{F} \wedge \forall x \in \mathcal{F} (f(x) \in x))),$$

d.h. jede Familie von nichtleeren Mengen hat eine Auswahlfunktion.

(b) Kuratowski-Zorn Lemma:

Sei $(P, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge, sodass jede Kette in P eine obere Schranke hat, dann besitzt P ein maximales Element.

(c) Teichmüller Prinzip:

Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Familie von Mengen. Wenn $\mathcal{F}$ endlichen Charakter hat, dann besitzt $\mathcal{F}$ ein maximales Element (maximal bezüglich Inklusion " $\subseteq$ ").

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $(P, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge, sodass jede Kette in P eine obere Schranke besitzt. Die Idee ist, ein Element $a_0 \in P$ auszuwählen, dann ein Element $a_1 \in \{y \in P : y > a_0\}$, dann ein Element $a_2 \in \{y \in P : y > a_1\}$, usw. bis die Menge $\{y \in P : y > a_\alpha\}$ leer ist. Auf diesem Weg erhalten wir eine strikt monotonwachsende Folge: $a_0 < a_1 < \dots < a_\alpha < \dots$



Angenommen, dass jede Kette in P eine obere Schranke $\mathbb{L}$ hat, folgt, dass die Folge ein letztes Element besitzt, welches ein maximales Element von P ist.

Um die Konstruktion im Rahmen von ZF ausführen zu können, sei für eine beliebige Menge $A \subseteq P$:

$U(A) := \{y \in P : \forall x \in A (y > x)\}$ die Menge aller oberen Schranken von A .

Weiter sei $f: \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow U\mathcal{P}(P) = P$ mit $\forall A \in \mathcal{P}(P): f(A) \in A$ eine Auswahlfunktion und sei zusätzlich $a_0 := f(P)$.

Für jedes $A \subseteq P$ definieren wir die folgende Auswahl:

$$u(A) := \begin{cases} f(U(A)) & \text{für } U(A) \neq \emptyset, \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung, dass wir für alle $A \subseteq P$ mit $U(A) \neq \emptyset$, $u(A) \notin A$ haben.

Dies folgt aus den folgenden Eigenschaften:

Aus der Definition von $U(A)$ ($\forall x \in U(A), \forall y \in A: x > y$) haben wir $U(A) \cap A = \emptyset$. Da $U(A) \neq \emptyset$ gilt, folgt aus den Definitionen von $u(A)$ sowie einer Auswahlfunktion $u(A) \in U(A)$. Somit ist $u(A) \notin A$.

Das Transfinite Recursion Theorem sagt uns nun, dass eine eindeutige Klassenfunktion G auf Ω existiert, sodass wir für jedes $\alpha \in \Omega$ haben, dass gilt:

$$G(\alpha) = u(\{a_\beta : \beta \in \alpha\}).$$

Hierbei ist Ω die Menge aller Ordinalen. Eine Funktion G auf Ω heisst Klassenfunktion, wenn sie auf allen Mengen definiert ist.

Insbesondere, für jedes $\alpha \in \Omega \setminus \{0\}$ haben wir entweder

$$(1) G(\alpha) = a_0 \text{ und } U(\{a_\beta : \beta \in \alpha\}) = \emptyset \text{ oder}$$

$$(2) G(\alpha) = a_\alpha \text{ und } a_\alpha \in U(\{a_\beta : \beta \in \alpha\}).$$

Das Auswahlaxiom



Somit gilt, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $G(\alpha) \neq a_0$ (also $G(\alpha) = a_\alpha$),
 (*) $G|_{\alpha+1} = \{ \langle \beta, G(\beta) \rangle : \beta \in \alpha+1 \}$ injektiv ist.

Nach Konstruktion haben wir für alle $\beta \in \alpha+1$ dass a_β eine obere Schranke von $\{a_0, a_1, \dots, a_{\beta-1}\} = \{a_\gamma : \gamma \in \beta\}$ ist.

Somit sind wir im Fall (2) und es folgt $G(\beta) = a_\beta$.

Also ist $G(\beta)$ für alle $\beta \in \alpha+1$ eindeutig bestimmt und $G|_{\alpha+1}$ somit injektiv.

Nun können mit Hartogs Theorem bzw. dem Korollar 3.22 (welches ohne Auswahlaxiom bewiesen werden kann) ein Ordinal $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ finden, sodass keine injektive Funktion $\gamma \rightarrow P$ existiert, was mit (*) dann $G(\gamma) = a_0$ impliziert.

Wir wählen γ mit $|\gamma| > |P|$. Da γ eine grössere Kardinalität hat, existiert keine injektive Funktion von γ nach P .

Sei $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ das kleinste Ordinal mit $0 \in \gamma_0 \in \gamma+1$, sodass $G(\gamma_0) = a_0$.

Da für alle $\delta, \delta' \in \gamma_0$, $G(\delta) < G(\delta')$ gilt, ist $G[\gamma_0]$ eine Kette, welche nach Annahme auf $(P, \leq)$ eine obere Schranke hat.

Wenn γ_0 ein Limesordinal wäre, dann wäre diese obere Schranke strikt grösser als alle Elemente von $\{G(\delta) : \delta \in \gamma_0\}$, und also $U(\{G(\delta) : \delta \in \gamma_0\}) \neq \emptyset$.

Nach (2) wäre demnach auch $G(\gamma_0) \neq a_0$, was der Definition von γ_0 widerspricht. Da γ_0 kein Limesordinal sein kann, gilt $\gamma_0 = \delta_0 + 1$ für ein $\delta_0 \in \mathbb{R}$. Per Definition von γ_0 haben wir

$G(\delta_0 + 1) = a_0$, also nach (1) auch $U(\{a_\beta : \beta \in \delta_0 + 1\}) = \emptyset$. Somit folgt $U(\{a_\beta : \beta \in \delta_0\}) = a_{\delta_0} \neq \emptyset$ und aus Fall (2) auch $G(\delta_0) = a_{\delta_0}$. Das heisst, dass $G(\delta_0) = a_{\delta_0}$ eine obere Schranke der Menge $\{a_\beta : \beta \in \delta_0\}$ ist, aber selbst keine obere Schranke



besitzt. Somit gilt $\{y \in P : y \supset G(\sigma_0)\} = \emptyset$, was die Definition 2 von $G(\sigma_0)$ ist ein maximales Element von P , ist.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Familie von Mengen und wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ endlichen Charakter besitzt. $\mathcal{F}$ ist halbgeordnet durch die Inklusion " $\subseteq$ ", welche immer eine Ordnungsrelation (reflexiv, transitiv, anti-symmetrisch) ist.

Für jede Kette $\mathcal{C}$ in $\mathcal{F}$ sei $U_{\mathcal{C}} = \bigcup \mathcal{C}$. Dann gehört jede endliche Teilmenge von $U_{\mathcal{C}}$ zu $\mathcal{F}$, somit gehört dank des endlichen Charakters von $\mathcal{F}$ auch $U_{\mathcal{C}}$ zu $\mathcal{F}$.

Auf der anderen Seite ist $U_{\mathcal{C}}$ eine obere Schranke von $\mathcal{C}$ bzgl. Inklusion, da alle Elemente von $\mathcal{C}$ in $U_{\mathcal{C}}$ enthalten sind und somit sicher auch das Grösste.

Somit hat jede Kette in $\mathcal{F}$ eine obere Schranke und wir können das Kuratowski-Zorn Lemma anwenden, um ein maximales Element der Familie $\mathcal{F}$ zu erhalten.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei $\mathcal{F}$ eine Familie nichtleerer Mengen, dann müssen wir eine Auswahlfunktion für $\mathcal{F}$ finden. Wir schauen uns die Familie $\mathcal{E} = \{f : f \text{ ist eine Auswahlfunktion für eine Teilfamilie } \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\}$ an. Bemerke, dass f eine Auswahlfunktion ist genau dann, wenn jede endliche Teilfunktion von f (Beschränkung auf endliche Teilmenge von $\mathcal{F}'$) eine Auswahlfunktion ist. In Formeln ausgedrückt:

f ist Auswahlfunktion auf $\mathcal{F} \iff f|_B$ ist Auswahlfunktion $\forall B \subseteq \mathcal{F}$ ^{endl.}

Somit hat $\mathcal{E}$ endlichen Charakter. Mit dem Teichmüller Prinzip folgt, dass die Familie $\mathcal{E}$ ein maximales Element hat, f_0 . Wobei hier maximal bezüglich der Grösse der Definitionsmenge von f gemeint ist. Da f_0 maximal ist, haben $\mathcal{E} \setminus \{f_0\} = \emptyset$

Das Auswahlaxiom



wir $D_f = F$ als Definitionsmenge von f und somit ist f
eine Auswahlfunktion auf ganz F . ■



Das Auswahlaxiom

Wir schreiben die Definition des Auswahlaxioms (AC) nochmals formal hin, wie es auf Seite 60 steht:

$$\forall \mathcal{F} (\emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \exists f (f \in {}^{\mathbb{N}}\mathcal{F} \wedge \forall x \in \mathcal{F} (f(x) \in x)))$$

Das "Downward Basis Principle" (DBP) lautet wie folgt:

Jeder Vektorraum V hat die Eigenschaft, dass jede Menge von Vektoren, welche V generiert, eine algebraische Basis enthält.

Theorem 6.2

Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- I) AC
- II) DBP

Beweis

$$\boxed{\text{I} \Rightarrow \text{II}}$$

Wir zeigen diese Richtung, indem wir das DBP aus dem Teichmüller Prinzip folgern, was nach Thm 6.1 äquivalent zum AC ist.

Wir nehmen dazu an, dass V ein Vektorraum ist und W eine Menge von Vektoren ist, welche V generieren. Ausserdem definieren wir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(W)$, die Familie von allen linear unabhängigen (lin. unab.) Teilmengen von W , wobei $\mathcal{P}$ die Potenzmenge einer Menge bedeutet.

Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ endlichen Charakter hat.

Sei $Y \in \mathcal{F}$. Y besteht aus lin. unab. Vektoren. Sei $X \subseteq Y$ eine endliche Teilmenge. X besteht somit auch aus lin. unab. Vektoren und somit gilt $\forall X \subseteq Y$, endlich, dass $X \in \mathcal{F}$.

Sei $X \in \mathcal{F}$ für jedes $X \subseteq Y$, endlich. Somit ist jedes X eine Menge von lin. unab. Vektoren. Eine Menge $Z \subseteq V$ ist lin. unab., falls jede endliche Teilmenge U von Z lin. unab. ist. Nach dieser Definition ist Y eine lin. unab. Menge und $Y \in \mathcal{F}$.

Das AuswahlaxiomI $\Rightarrow$ II Fortsetzung

Durch das Teichmüller Prinzip folgt, dass $\mathcal{F}$ ein maximales Element $W_0 \in \mathcal{W}$ hat.

Wir bemerken, dass dieses W_0 nicht eindeutig sein muss, jedoch reicht eines aus, um daraus eine Basis zu bilden.

Durch die Konstruktion von $\mathcal{F}$ ist $W_0 \in \mathcal{W}$ eine Menge von Vektoren, welche lin. unabh. sind, und die V generieren, da W dies auch tut und die Maximalität von W_0 diese Eigenschaft erhält.

Wäre dies nicht so, gäbe es ein $v \in W \setminus W_0$ und v ist nicht als Linearkombination von Vektoren aus W_0 darstellbar. Dann wäre jedoch $W_0 \cup \{v\}$ ein grösseres Element in $\mathcal{W}$.

Mit diesen beiden Eigenschaften bildet W_0 eine algebraische Basis von V .

II $\Rightarrow$ I

Sei $\mathcal{F} := \{X_c \mid c \in I\}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen.

Sei $X := \bigcup \mathcal{F}$.

X besteht somit aus allen Elementen, welche in einem Element von $\mathcal{F}$ enthalten sind.

Somit

$$X = \{x \in X_c \mid X_c \in \mathcal{F}\}.$$

Unser Ziel ist es, eine Funktion $f: \mathcal{F} \rightarrow X = \bigcup \mathcal{F}$ zu konstruieren, so dass für jedes $X_c \in \mathcal{F}$ folgendes gilt:

$$f(X_c) \in X_c.$$

Also eine Auswahlfunktion, die aus jeder Menge X_c ein Element $x \in X_c$ wählt.

Das Auswahlaxiom**II $\Rightarrow$ I** Fortsetzung

OBdA nehmen wir an, dass alle Elemente von $\mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $\forall X_\alpha, X_\beta \in \mathcal{F} : X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$.

Falls wir dies nicht annehmen, können wir die Familie folgender Mengen betrachten: $\tilde{\mathcal{F}} := \{X_\alpha \times \{\alpha\} \mid \alpha \in I\}$, anstelle von $\mathcal{F}$.

In diesem Fall gilt: Seien $X_\alpha \neq X_\beta$ zwei Mengen von $\mathcal{F}$.

Falls $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, dann sind auch $(y_\alpha, \alpha) \neq (y_\beta, \beta)$ verschiedene Elemente in $\tilde{\mathcal{F}}$, wobei $y_\alpha \in X_\alpha, y_\beta \in X_\beta$.

Falls $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$, dann existiert ein $y \in X_\alpha \cap X_\beta$, wobei in $\mathcal{F}$ zwei verschiedene Elemente X_α, X_β , dasselbe Element y besitzen.

In $\tilde{\mathcal{F}}$ sind $(y, \alpha) \neq (y, \beta)$ verschiedene Elemente. Das wichtige ist somit, dass jedes Element nur in einer Menge sein kann. Dies ist später noch wichtig.

Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger Körper, welchen wir fixieren.

(z.B. $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{F} = \mathbb{F}_2, \dots$).

Wir fügen alle Elemente $x \in X$ als Unbestimmte zu unserem $\mathbb{F}$ hinzu und erhalten so den Körper $\mathbb{F}(X)$, welcher alle rationalen Funktionen in den Variablen X enthält, wobei die Koeffizienten in $\mathbb{F}$ sind.

Jedes Element $r \in \mathbb{F}(X)$ kann in der Form

$$r = \frac{a_0 + a_1 X_{1,1} \cdots X_{1,n_1} + \dots + a_k X_{k,1} \cdots X_{k,n_k}}{b_0 + b_1 Y_{1,1} \cdots Y_{1,t_1} + \dots + b_r Y_{r,1} \cdots Y_{r,t_r}}$$

, wobei $a_i, b_j \in \mathbb{F}$ und $X_{i,m}, Y_{j,l} \in X$, geschrieben werden.

Der Nenner ist dabei ungleich 0.

Wir definieren für jedes $x \in X$ ein Element $x^* \in \mathbb{F}(X)$ durch:

$$x^* := \frac{1 \cdot x}{1}.$$

Das AuswahlaxiomII $\Rightarrow$ I Fortsetzung

Wir bemerken, dass $x^* \in F(x) \setminus \{0\}$, wobei wir später noch davon Gebrauch machen, dass $x^* \neq 0$ ist.

Ebenso ist die Abbildung $x \mapsto x^*$ injektiv von $X \rightarrow F(x) \setminus \{0\}$.

Das weitere Vorgehen ist, dass wir einen Vektorraum V definieren, so dass wir ein $\omega \in V$ haben, welches V generiert, und darauf das DBP anwenden, um so unsere Auswahlfunktion zu erhalten.

V ist der Vektorraum über $F(X)$ von allen Funktionen $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow F(X)$, so dass für jede solche Funktion φ die Menge $\{X_i \in \mathcal{F} \mid \varphi(X_i) \neq 0\}$ endlich ist.

In V ist Vektoraddition wie folgt definiert:

$$(\varphi + \psi)(X_i) := \varphi(X_i) + \psi(X_i)$$

und skalare Multiplikation mit $r \in F(X)$ durch

$$(r \cdot \varphi)(X_i) := r \cdot \varphi(X_i).$$

Wir können die 8 Vektorraumaxiome überprüfen, um zu sehen, dass V tatsächlich ein Vektorraum ist.

Weiter definieren wir für jedes $x \in X$ die Funktion $\varphi_x: \mathcal{F} \rightarrow F(X)$ durch

$$\varphi_x(X_i) := \begin{cases} x^* & , \text{ wenn } x \in X_i. \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die φ_x sind ähnlich aufgebaut wie Projektionen, dass alle bis auf eine Menge nach 0 gesendet wird, was ähnlich zu den Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ ist.

Für jedes $x \in X$ ist φ_x ein Vektor von V , da die Menge $\{X_i \in \mathcal{F} \mid \varphi_x(X_i) \neq 0\}$ genau ein Element hat.

Das AuswahlaxiomII $\Rightarrow$ I Fortsetzung

Sei weiter $W := \{\varphi_x \mid x \in X\}$ eine Menge von Vektoren aus V , d.h. $W \subseteq V$.

Wir bemerken, dass für $x, \tilde{x} \in X_c$ und $X_c \in \mathcal{F}$ folgt, dass $\varphi_x = \frac{x^*}{\tilde{x}^*} \varphi_{\tilde{x}}$, da $\varphi_x / x^* = 1 = \varphi_{\tilde{x}} / \tilde{x}^*$, was zeigt, dass φ_x und $\varphi_{\tilde{x}}$ linear abhängig sind. Somit hat eine Menge $X_c \in \mathcal{F}$ eine zugehörige Funktion φ_x für ein $x \in X_c$. Dieses Erkenntnis kann nur gewonnen werden, da $x^* \neq 0$ ist und somit durch x^* geteilt werden darf.

Da für jeden Vektor $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow F(X)$ in V die Menge $\{X_c \in \mathcal{F} \mid \varphi(X_c) \neq 0\}$ endlich ist, kann jeder Vektor φ als Linearkombination aus endlich vielen Vektoren aus W geschrieben werden, somit wird V aus W generiert.

Somit hat W durch das DBP eine algebraische Basis $W^* \subseteq W \subseteq V$.

Sei $W := \{x \in X \mid \varphi_x \in W^*\} \subseteq X$, wobei dies keine Teilmenge von V ist sondern von X .

Dann gibt es für jedes $X_c \in \mathcal{F}$ maximal ein $x \in X_c$, welches zu W gehört, weil W^* eine Menge von linear unabhängigen Vektoren ist.

Auf der anderen Seite gibt es mindestens ein $x \in X_c$, welches zu W gehört, da V von W^* generiert wird und die Mengen X_c paarweise disjunkt sind. Deshalb wurde zu Beginn diese Unterscheidung gemacht.

Daraus folgt, dass es für jedes $X_c \in \mathcal{F}$ genau ein Element $x \in (X_c \cap W)$ gibt.

Somit haben wir eine Auswahlfunktion konstruiert und der Beweis ist komplett. $\square$