ETH zürich

Theorem 6.3

Rebecca Morger, Massimo Jörin

Rückschau

- Kuratowski-Zorn Lemma: Eine nicht-leere, partiell geordnete Menge, deren Ketten alle von oben beschränkt sind, hat ein maximales Element.
- Teichmüller Prinzip: Eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter hat ein maximales Element.

Theorem (6.1)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *Auswahlaxiom*
2. *Kuratowski-Zorn Lemma*
3. *Teichmüller Prinzip*

Definitionen

- Vektorraumbasis-Prinzip: Jeder Vektorraum hat eine algebraische Basis.
- Kurepas Prinzip: Jede partiell geordnete Menge hat eine maximale Teilmenge von paarweise nicht vergleichbaren Elementen.
- Multiple Choice: Für jede Familie $\mathcal{F}$ von nicht-leeren Mengen existiert eine Funktion $f : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F})$, sodass für jedes $X \in \mathcal{F}$ gilt, dass $f(X)$ eine nicht-leere, endliche Teilmenge von X ist.

Heutiges Theorem

Theorem (6.3)

Folgende Aussagen sind äquivalent in ZF:

1. *Auswahlaxiom*
2. *Vektorraumbasis-Prinzip*
3. *Multiple Choice*
4. *Kurepas Prinzip*

Erinnerung

- Eine Menge (möglicherweise unendlich) von Vektoren ist **linear unabhängig**, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.
- Eine Menge S von Vektoren erzeugt einen Vektorraum V, wenn jeder Vektor $v \in V$ als endliche Linearkombination von Vektoren aus S geschrieben werden kann.
- Eine Menge S ist eine **Basis** vom Vektorraum V, wenn sie linear unabhängig ist und denn Vektorraum V erzeugt.
- Eine Familie $\mathcal{F}$ von Mengen hat **endlichen Charakter**, falls für jede Menge X gilt: $X \in \mathcal{F} \iff \mathit{fin}(X) \subseteq \mathcal{F}$, wobei $\mathit{fin}(X)$ alle möglichen endlichen Teilmengen der Menge X sind.

"Auswahlaxiom $\Rightarrow$ Vektorraumbasis Prinzip"

Beweis:

"Auswahlaxiom $\Rightarrow$ Vektorraumbasis Prinzip"

Beweis:
Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen von linear unabhängigen Vektoren.

"Auswahlaxiom $\Rightarrow$ Vektorraumbasis Prinzip"

Beweis:

Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen von linear unabhängigen Vektoren.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ hat endlichen Charakter. (weil endliche Teilmengen von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig sind; und weil für jede (unendliche) Menge X mit $\mathit{fin}(X) \subseteq \mathcal{F}$ auch gilt, dass jede endliche Teilmenge von X linear unabhängig ist, also ist auch X linear unabhängig)

"Auswahlaxiom $\Rightarrow$ Vektorraumbasis Prinzip"

Beweis:

Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen von linear unabhängigen Vektoren.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ hat endlichen Charakter. (weil endliche Teilmengen von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig sind; und weil für jede (unendliche) Menge X mit $\mathit{fin}(X) \subseteq \mathcal{F}$ auch gilt, dass jede endliche Teilmenge von X linear unabhängig ist, also ist auch X linear unabhängig)

Theorem (6.1) $\Rightarrow \mathcal{F}$ hat ein maximales Element, also eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren. $\square$

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beweis:

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beweis:

Sei $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I,\, X_i \neq \emptyset\, \forall i \in I\}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen, oBdA disjunkt.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beweis:

Sei $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I,\ X_i \neq \emptyset\ \forall i \in I\}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen, oBdA disjunkt.

Definiere $X := \bigcup \mathcal{F}$ und betrachte $\mathbb{F}(X)$, wobei $\mathbb{F}$ ein fixer Körper ist. ($\mathbb{F}(X)$ ist der Körper aller rationaler Funktionen mit Variablen aus X und Koeffizienten aus $\mathbb{F}$)

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beweis:

Sei $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I,\ X_i \neq \emptyset\, \forall i \in I\}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen, oBdA disjunkt.

Definiere $X := \bigcup \mathcal{F}$ und betrachte $\mathbb{F}(X)$, wobei $\mathbb{F}$ ein fixer Körper ist. ($\mathbb{F}(X)$ ist der Körper aller rationaler Funktionen mit Variablen aus X und Koeffizienten aus $\mathbb{F}$)

Ein nicht-konstantes Monom in $\mathbb{F}(X)$ hat die Form $a{x_1}^{k_1} \cdots {x_n}^{k_n}$, wobei $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ und $x_i \in X, k_i \in \mathbb{N}^+$ für $1 \leq i \leq n \in \omega$.

Definiere den i-Grad eines nicht-konstanten Monoms $a{x_1}^{k_1} \cdots {x_n}^{k_n}$ durch $\sum_{i=1, i \in I}^{n} x_i$.

Eine rationale Funktion $q \in \mathbb{F}(X)$ heisst i-homogen vom Grad d, falls von der Form

$q = \frac{\textit{Monome vom i-Grad n+d}}{\textit{Monome vom i-Grad n}}$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beispiele:

Sei $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$, wobei $X_1 = \{u, v\}$, $X_2 = \{w\}$, $X_3 = \{x, y, z\}$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beispiele:

Sei $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$, wobei $X_1 = \{u, v\}$, $X_2 = \{w\}$, $X_3 = \{x, y, z\}$.

$\frac{4ux^2y^3+3w^2vz^5-uv^2w^4xy^3z}{2vx^3-uvwxyz+3y^2z} \in \mathbb{Q}(u, v, w, x, y, z)$ ist 3-homogen vom Grad 2.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Beispiele:

Sei $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$, wobei $X_1 = \{u, v\}$, $X_2 = \{w\}$, $X_3 = \{x, y, z\}$.

$\frac{4ux^2y^3+3w^2vz^5-uv^2w^4xy^3z}{2vx^3-uvwxyz+3y^2z} \in \mathbb{Q}(u, v, w, x, y, z)$ ist 3-homogen vom Grad 2.

$\frac{u^6w+u^4v^2w}{u^5vw-u^3v^3w+uv^5w} \in \mathbb{F}_2(u, v, w)$ ist 1-homogen vom Grad 0 und 2-homogen vom Grad 0.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

$\mathbb{F}_0$:= {rationale, i-homogene Funktionen vom Grad 0 $\forall i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$ ein Unterkörper.

(Check: Für die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{F}(X), +)$, bemerke dass:

"$\frac{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i} + \frac{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i} = \frac{\text{Monome vom i-Grad k } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad k } \forall i}$" wobei k der Grad der gleichnennrigen Polynome

Für die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{F}(X), \cdot)$, bemerke dass:

"$\frac{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i} \cdot \frac{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i} = \frac{\text{Monome vom i-Grad mn } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad mn } \forall i}$")

$\Rightarrow \mathbb{F}(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_0$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

$\mathbb{F}_0 := \{$rationale, i-homogene Funktionen vom Grad $0\ \forall i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$ ein Unterkörper.

(Check: Für die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{F}(X), +)$, bemerke dass:
"$\frac{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i} + \frac{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i} = \frac{\text{Monome vom i-Grad k } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad k } \forall i}$" wobei k der Grad der gleichnennrigen Polynome
Für die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{F}(X), \cdot)$, bemerke dass:

"$\frac{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i} \cdot \frac{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i} = \frac{\text{Monome vom i-Grad mn } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad mn } \forall i}$")

$\Rightarrow \mathbb{F}(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_0$.
Definiere $V :=< \frac{1x}{1} | x \in X >$. Nach Annahme hat der $\mathbb{F}_0$-Vektorraum V eine algebraische Basis $\mathcal{B}$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

$\mathbb{F}_0 := \{$rationale, i-homogene Funktionen vom Grad $0\ \forall i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$ ein Unterkörper.

(Check: Für die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{F}(X), +)$, bemerke dass:
"$\frac{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i} + \frac{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i} = \frac{\text{Monome vom i-Grad k } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad k } \forall i}$" wobei k der Grad der gleichnennrigen Polynome
Für die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{F}(X), \cdot)$, bemerke dass:

"$\frac{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad m } \forall i} \cdot \frac{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad n } \forall i} = \frac{\text{Monome vom i-Grad mn } \forall i}{\text{Monome vom i-Grad mn } \forall i}$")

$\Rightarrow \mathbb{F}(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_0$.
Definiere $V := < \frac{1x}{1} | x \in X >$. Nach Annahme hat der $\mathbb{F}_0$-Vektorraum V eine algebraische Basis $\mathcal{B}$. Mithilfe dieser Basis werden wir die gewünschte Funktion $f : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(X)$ konstruieren.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Sei nun $i \in I$ fix und $x \in X_i$. Wir können x dank unserer Basis als endliche Linearkombination darstellen: $x = \sum_{v \in B(x)} q_v^x v$,
wobei $B(x) \in fin(\mathcal{B})$ (endliche Auswahl der nötigen Basisvektoren), $q_v^X \in \mathbb{F}_0 \setminus \{0\}$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Sei nun $i \in I$ fix und $x \in X_i$. Wir können x dank unserer Basis als endliche Linearkombination darstellen: $x = \sum_{v \in B(x)} q_v^x v$,
wobei $B(x) \in fin(\mathcal{B})$ (endliche Auswahl der nötigen Basisvektoren), $q_v^X \in \mathbb{F}_0 \setminus \{0\}$.
Vergleich: für anderes $y \in X_i : y = \sum_{v' \in B(y)} q_{v'}^y v'$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Sei nun $i \in I$ fix und $x \in X_i$. Wir können x dank unserer Basis als endliche Linearkombination darstellen: $x = \sum_{v \in B(x)} q_v^x v$,
wobei $B(x) \in fin(\mathcal{B})$ (endliche Auswahl der nötigen Basisvektoren), $q_v^X \in \mathbb{F}_0 \setminus \{0\}$.
Vergleich: für anderes $y \in X_i$: $y = \sum_{v' \in B(y)} q_{v'}^y v'$. Multiplikation von x mit $\frac{y}{x} \in \mathbb{F}_0$ ergibt $y = \sum_{v \in B(x)} (\frac{y}{x} \cdot q_v^x) v$.
Folglich (weil $\mathcal{B}$ eine Basis, Darstellung einzigartig) : $B(x) = B(y)$ und $q_v^y = \frac{y}{x} q_v^x$, resp. $\frac{q_v^x}{x} = \frac{q_v^y}{y} (*)$.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Sei nun $i \in I$ fix und $x \in X_i$. Wir können x dank unserer Basis als endliche Linearkombination darstellen: $x = \sum_{v \in B(x)} q_v^x v$,
wobei $B(x) \in fin(\mathcal{B})$ (endliche Auswahl der nötigen Basisvektoren), $q_v^X \in \mathbb{F}_0 \setminus \{0\}$.
Vergleich: für anderes $y \in X_i : y = \sum_{v' \in B(y)} q_{v'}^y v'$. Multiplikation von x mit $\frac{y}{x} \in \mathbb{F}_0$ ergibt $y = \sum_{v \in B(x)} (\frac{y}{x} \cdot q_v^x) v$.
Folglich (weil $\mathcal{B}$ eine Basis, Darstellung einzigartig) : $B(x) = B(y)$ und $q_v^y = \frac{y}{x} q_v^x$, resp. $\frac{q_v^x}{x} = \frac{q_v^y}{y} (*)$.
Da wir $x, y \in X_i$ beliebig wählten, hängen die **endliche** Menge $B(x)$ und die **endlich vielen** Skalaren $\frac{q_v^x}{x}$ nicht von x, y ab, sondern nur von i. Wir nennen sie deshalb B_i und $q_v^i (*)$ respektive.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Da $q_v^x \in \mathbb{F}_0$, ist es j-homogen vom Grad 0 für alle j. Damit folgt dass q_v^i j-homogen vom Grad 0 ist für alle $j \neq i$ und i-homogen vom Grad -1. Das heisst, wenn wir q_v^i in reduzierter Form schreiben (Bruch von Polynomen), dann müssen einige Variablen von X_i im Nenner auftauchen.

"Vektorraumbasis Prinzip $\Rightarrow$ Multiple Choice"

Da $q_v^x \in \mathbb{F}_0$, ist es j-homogen vom Grad 0 für alle j. Damit folgt dass q_v^i j-homogen vom Grad 0 ist für alle $j \neq i$ und i-homogen vom Grad -1. Das heisst, wenn wir q_v^i in reduzierter Form schreiben (Bruch von Polynomen), dann müssen einige Variablen von X_i im Nenner auftauchen.
Definiere $f(X_i)$ als die Menge aller Variablen von X_i, die im Nenner von q_v^i (in reduzierter Form) auftauchen für ein $v \in B_i$. Dann ist $f(X_i)$ eine endliche, nicht-leere Teilmenge von X_i. $\square$

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Beweis:

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Beweis: Sei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge und sei
$f : P \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(\bigcup P \setminus \{\emptyset\})$, $X \mapsto f(X)$ die Funktion aus Multiple Choice.

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Beweis: Sei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge und sei $f : P \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(\bigcup P \setminus \{\emptyset\})$, $X \mapsto f(X)$ die Funktion aus Multiple Choice.

Sei $g : \mathcal{P}(P) \to fin(P)$, $g(X) := \begin{cases} \emptyset & X = \emptyset \\ \{y \in f(X) \mid y \text{ ist } < \text{-minimal in } f(X)\} & \text{sonst} \end{cases}$

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Beweis: Sei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge und sei $f : P \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(\bigcup P \setminus \{\emptyset\}),\ X \mapsto f(X)$ die Funktion aus Multiple Choice.

Sei $g : \mathcal{P}(P) \to fin(P),\ g(X) := \begin{cases} \emptyset & X = \emptyset \\ \{y \in f(X) \mid y \text{ ist } < \text{-minimal in } f(X)\} & \text{sonst} \end{cases}$

Für $X \neq \emptyset$ ist $g(X)$ endlich, (weil $g(X) \subseteq f(X)$ endlich), nicht-leer, (weil jede partiell geordnete, endliche Menge kleinste Elemente hat), und $g(X)$ hat paarweise nicht vergleichbare Elemente, (Nimm an, $y \neq y' \in g(X)$ seien vergleichbar, d.h. entweder $y < y'$ oder $y' < y$; oBdA sei $y < y'$. Dies widerspricht aber der Nicht-Existenz eines kleineren Elements als y', also der Minimalität von y'. Also sind y und y' nicht vergleichbar.)

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Transfinite Induktion: Sei $\mathcal{A}_\alpha := \begin{cases} g(P) & \alpha = 0 \\ g(X_\alpha) & \alpha \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$

wobei $X_\alpha := \{x \in P \mid x$ ist nicht vergleichbar mit jedem $a \in \bigcup\{\mathcal{A}_\beta \mid \beta \in \alpha\}\}$.

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Transfinite Induktion: Sei $\mathcal{A}_\alpha := \begin{cases} g(P) & \alpha = 0 \\ g(X_\alpha) & \alpha \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$

wobei $X_\alpha := \{x \in P \mid x \text{ ist nicht vergleichbar mit jedem } a \in \bigcup\{\mathcal{A}_\beta \mid \beta \in \alpha\}\}$.

$\exists \alpha_0 \in \Omega : X_{\alpha_0} = \emptyset$ (folgt aus Hartogs' Theorem oder dem daraus resultierenden Korollar auf S.60)

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Transfinite Induktion: Sei $\mathcal{A}_\alpha := \begin{cases} g(P) & \alpha = 0 \\ g(X_\alpha) & \alpha \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$

wobei $X_\alpha := \{x \in P \mid x \text{ ist nicht vergleichbar mit jedem } a \in \bigcup\{\mathcal{A}_\beta \mid \beta \in \alpha\}\}$.

$\exists \alpha_0 \in \Omega : X_{\alpha_0} = \emptyset$ (folgt aus Hartogs' Theorem oder dem daraus resultierenden Korollar auf S.60)

$\mathcal{A}_\alpha$ sind paarweise disjunkt: $X_\alpha \subset P \setminus (\bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{A}_\beta)$. Per Konstruktion sind $\bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{A}_\beta$ alles minimale Elemente von P. (Wir fangen mit einer Menge von minimalen Elementen an, und filtern danach aus der Menge von Elementen, die unvergleichbar sind mit den uns bereits bekannten minimalen Element, neue minimale Elemente). Da die $\mathcal{A}_\alpha$ aus minimalen Elementen aus P bestehen, kann jedes minimale Element genau einmal auftauchen in einem $\mathcal{A}_\alpha$- ansonsten wäre es wegen Reflexivität vergleichbar mit sich selber in einer "früheren" Menge $\mathcal{A}_\beta$.

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Wir haben $g(X_\alpha) = \emptyset \iff$ es gibt keine minimalen Element mehr in X_α. Aber dann $X_\beta = X_\alpha$ für alle β mit $\alpha \in \beta$, da $A_\alpha = \emptyset$ und damit auch $A_\beta = \emptyset$. Es gilt sogar $X_\beta = \emptyset$, denn $g(X_\alpha) = \emptyset$ genau dann, wenn $X_\alpha = \emptyset$, denn für eine nicht-leere endliche Menge, welche Teilmenge einer partiell geordneten Menge ist, existiert immer ein minimales Element.

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Wir haben $g(X_\alpha) = \emptyset \iff$ es gibt keine minimalen Element mehr in X_α. Aber dann $X_\beta = X_\alpha$ für alle β mit $\alpha \in \beta$, da $A_\alpha = \emptyset$ und damit auch $A_\beta = \emptyset$. Es gilt sogar $X_\beta = \emptyset$, denn $g(X_\alpha) = \emptyset$ genau dann, wenn $X_\alpha = \emptyset$, denn für eine nicht-leere endliche Menge, welche Teilmenge einer partiell geordneten Menge ist, existiert immer ein minimales Element.

Da $\alpha \in \beta \Rightarrow X_\beta \subseteq X_\alpha$, muss irgendwann gelten (transfinite Induktion + Hartogs' Theorem), dass $X_\alpha = \emptyset$.

"Multiple Choice $\Rightarrow$ Kurepas Prinzip"

Wir haben $g(X_\alpha) = \emptyset \iff$ es gibt keine minimalen Element mehr in X_α. Aber dann $X_\beta = X_\alpha$ für alle β mit $\alpha \in \beta$, da $A_\alpha = \emptyset$ und damit auch $A_\beta = \emptyset$. Es gilt sogar $X_\beta = \emptyset$, denn $g(X_\alpha) = \emptyset$ genau dann, wenn $X_\alpha = \emptyset$, denn für eine nicht-leere endliche Menge, welche Teilmenge einer partiell geordneten Menge ist, existiert immer ein minimales Element.

Da $\alpha \in \beta \Rightarrow X_\beta \subseteq X_\alpha$, muss irgendwann gelten (transfinite Induktion + Hartogs' Theorem), dass $X_\alpha = \emptyset$.

$\Rightarrow \bigcup\{\mathcal{A}_\beta \mid \beta \in \alpha_0\} \subseteq P$ ist eine maximale Menge von paarweise nicht vergleichbaren Mengen.

Erinnerung/Definitionen

- Eine Menge ist eine **Ordinalzahl**, wenn sie transitiv und wohlgeordnet ist bezüglich $\in$. Für eine Ordinalzahl α definieren wir $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.
- Für jede Ordinalzahl gilt: Entweder existiert eine Ordinalzahl β sodass $\alpha = \beta + 1$ (**Nachfolgeordinalzahl**), oder $\alpha = \bigcup \alpha$ (**Limitordinalzahl**).
- Für eine Ordinalzahl α definieren wir folgende Mengen:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\alpha &= \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta \quad \text{falls } \alpha \text{ eine Limitordinalzahl ist.} \end{aligned}$$

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Fundierungsaxiom: $\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y \in x(y \cap x = \emptyset))$

$\Rightarrow$ Für jede Menge x existiert eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$, sodass $x \subseteq V_\alpha$.

Theorem 3.23: Auswahlaxiom $\iff$ Wohlordnungsprinzip

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Fundierungsaxiom: $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(y \cap x = \emptyset))$
$\Rightarrow$ Für jede Menge x existiert eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$, sodass $x \subseteq V_\alpha$.
Theorem 3.23: Auswahlaxiom $\iff$ Wohlordnungsprinzip

Beweisidee: Zeige, dass unter Annahme von Kurepas Prinzip folgt, dass für jedes $\alpha \in \Omega$ gilt, dass V_α wohlgeordnet werden kann. (Und wenn V_α wohlgeordnet werden kann (dass also jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element hat), kann x als Teilmenge von V_α auch wohlgeordnet werden.)

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 1: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass linear geordnete Mengen wohlgeordnet sind.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 1: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass linear geordnete Mengen wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(P, \prec)$ eine linear geordnete Menge.

Definiere $W := \{(X, x) \mid X \subseteq P, x \in X\}$ und die Partialordnung < auf W durch:

$(X, x) < (Y, y) \iff X = Y \wedge x \prec y$.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 1: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass linear geordnete Mengen wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(P, \prec)$ eine linear geordnete Menge.

Definiere $W := \{(X, x) \mid X \subseteq P, x \in X\}$ und die Partialordnung < auf W durch:

$(X, x) < (Y, y) \iff X = Y \wedge x \prec y$.

Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ $(W, <)$ hat eine maximale Menge $\mathcal{A} \subseteq W$ von paarweise nicht vergleichbaren Elementen.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 1: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass linear geordnete Mengen wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(P, \prec)$ eine linear geordnete Menge.

Definiere $W := \{(X, x) \mid X \subseteq P, x \in X\}$ und die Partialordnung $<$ auf W durch:

$(X, x) < (Y, y) \iff X = Y \wedge x \prec y$.

Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ $(W, <)$ hat eine maximale Menge $\mathcal{A} \subseteq W$ von paarweise nicht vergleichbaren Elementen.

$\forall \emptyset \neq X \subseteq P : f(X) := x \in X$ mit $(X, f(X)) \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow f : \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup(\mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}) = P$ ist eine Auswahlfunktion (für x $\in \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$ ist $f(x) \in x$.)

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 1: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass linear geordnete Mengen wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(P, \prec)$ eine linear geordnete Menge.

Definiere $W := \{(X, x) \mid X \subseteq P, x \in X\}$ und die Partialordnung < auf W durch:

$(X, x) < (Y, y) \iff X = Y \wedge x \prec y$.

Kurepas Prinzip $\Rightarrow (W, <)$ hat eine maximale Menge $\mathcal{A} \subseteq W$ von paarweise nicht vergleichbaren Elementen.

$\forall \emptyset \neq X \subseteq P : f(X) := x \in X$ mit $(X, f(X)) \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow f : \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup(\mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}) = P$ ist eine Auswahlfunktion (für x $\in \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$ ist $f(x) \in x$.)

Daraus folgt, dass P wohlgeordnet werden kann. $\square$

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 2: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass Potenzmengen von wohlgeordneten Mengen ebenfalls wohlgeordnet sind.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 2: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass Potenzmengen von wohlgeordneten Mengen ebenfalls wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(Q, <_Q)$ eine wohlgeordnete Menge.

Definiere die lineare Ordnung $\prec$ auf $\mathcal{P}(Q)$ durch

$x \prec y :\Longleftrightarrow$ das $<_Q$ -minimale Element von $x \Delta y$ gehört zu x,

wobei $x \Delta y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ die symmetrische Differenz von x und y.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 2: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass Potenzmengen von wohlgeordneten Mengen ebenfalls wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(Q, <_Q)$ eine wohlgeordnete Menge.

Definiere die lineare Ordnung $\prec$ auf $\mathcal{P}(Q)$ durch

$x \prec y :\Longleftrightarrow$ das $<_Q$ -minimale Element von $x \Delta y$ gehört zu x,

wobei $x \Delta y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ die symmetrische Differenz von x und y.

Check Linearität: $\prec$ ist die durch $<_Q$ induzierte lexikographische Ordnung auf $\mathcal{P}(Q)$. Alternativ: Für $x, y \in \mathcal{P}(Q)$ gilt: Das $<_Q$-kleinste Element von $x \Delta y$ gehört entweder zu x (dann gilt $x \prec y$) oder zu y (dann gilt $y \prec x$) oder $x \Delta y = \emptyset$ (und somit $x = y$).

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Behauptung 2: Mit Kurepas Prinzip folgt, dass Potenzmengen von wohlgeordneten Mengen ebenfalls wohlgeordnet sind.

Beweis: Sei $(Q, <_Q)$ eine wohlgeordnete Menge.

Definiere die lineare Ordnung $\prec$ auf $\mathcal{P}(Q)$ durch

$x \prec y :\Longleftrightarrow$ das $<_Q$ -minimale Element von $x \Delta y$ gehört zu x,

wobei $x \Delta y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ die symmetrische Differenz von x und y.

Check Linearität: $\prec$ ist die durch $<_Q$ induzierte lexikographische Ordnung auf $\mathcal{P}(Q)$. Alternativ: Für $x, y \in \mathcal{P}(Q)$ gilt: Das $<_Q$-kleinste Element von $x \Delta y$ gehört entweder zu x (dann gilt $x \prec y$) oder zu y (dann gilt $y \prec x$) oder $x \Delta y = \emptyset$ (und somit $x = y$).

Behauptung 1 $\Rightarrow \mathcal{P}(Q)$ kann wohlgeordnet werden. $\square$

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Sei α_0 ein beliebiges, aber fixiertes Ordinal.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Sei α_0 ein beliebiges, aber fixiertes Ordinal.

Wenn $\alpha_0 = 0$, dann ist $<_0 = \emptyset$ eine Wohlordnung von V_0.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Sei α_0 ein beliebiges, aber fixiertes Ordinal.
Wenn $\alpha_0 = 0$, dann ist $<_0 = \emptyset$ eine Wohlordnung von V_0.
Sei $\alpha_0 \neq 0$, dann sei ξ das kleinste Ordinal, so dass es keine Injektion von ξ nach V_{α_0} gibt (also $|\xi| > |V_{\alpha_0}|$) (Existenz: Hartogs' Theorem, ohne AC). Da ξ wohlgeordnet ist mit $\in$, folgt mit der Behauptung 2, dass $\mathcal{P}(\xi)$ wohlgeordnet werden kann. Sei $<_\xi$ eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(\xi)$.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Mit Induktion von $\beta \in \alpha_0$ wollen wir eine Wohlordnung von V_β konstruieren, um eine Wohlordnung von V_{α_0} zu erhalten.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Mit Induktion von $\beta \in \alpha_0$ wollen wir eine Wohlordnung von V_β konstruieren, um eine Wohlordnung von V_{α_0} zu erhalten.
Falls $\beta = 0$, dann ist $<_0 = \emptyset$ eine Wohlordnung von V_β.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Mit Induktion von $\beta \in \alpha_0$ wollen wir eine Wohlordnung von V_β konstruieren, um eine Wohlordnung von V_{α_0} zu erhalten.
Falls $\beta = 0$, dann ist $<_0 = \emptyset$ eine Wohlordnung von V_β.
Nehme an, dass V_β bereits wohlgeordnet ist durch $<_\beta$. Laut Prop 3.20 gibt es ein Ordinal ξ', so dass es eine ordnungserhaltende Bijektion $f : V_\beta \to \xi'$ gibt
($x <_\beta y \Rightarrow f(x) \in f(y)$.)

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Mit Induktion von $\beta \in \alpha_0$ wollen wir eine Wohlordnung von V_β konstruieren, um eine Wohlordnung von V_{α_0} zu erhalten.
Falls $\beta = 0$, dann ist $<_0 = \emptyset$ eine Wohlordnung von V_β.
Nehme an, dass V_β bereits wohlgeordnet ist durch $<_\beta$. Laut Prop 3.20 gibt es ein Ordinal ξ', so dass es eine ordnungserhaltende Bijektion $f : V_\beta \to \xi'$ gibt
($x <_\beta y \Rightarrow f(x) \in f(y)$.)
Da $\beta \in \alpha_0$, ist $V_\beta \subseteq V_{\alpha_0}$. Dies impliziert $\xi' \in \xi$ (ansonsten hätten wir eine Injektion $\xi \to V_{\alpha_0}$, im Widerspruch zur Definition von ξ).

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Mit Induktion von $\beta \in \alpha_0$ wollen wir eine Wohlordnung von V_β konstruieren, um eine Wohlordnung von V_{α_0} zu erhalten.
Falls $\beta = 0$, dann ist $<_0 = \emptyset$ eine Wohlordnung von V_β.
Nehme an, dass V_β bereits wohlgeordnet ist durch $<_\beta$. Laut Prop 3.20 gibt es ein Ordinal ξ', so dass es eine ordnungserhaltende Bijektion $f : V_\beta \to \xi'$ gibt
($x <_\beta y \Rightarrow f(x) \in f(y)$.)
Da $\beta \in \alpha_0$, ist $V_\beta \subseteq V_{\alpha_0}$. Dies impliziert $\xi' \in \xi$ (ansonsten hätten wir eine Injektion $\xi \to V_{\alpha_0}$, im Widerspruch zur Definition von ξ).
Die Wohlordnung $<_\xi$ von $\mathcal{P}(\xi)$ induziert durch Einschränkung auf $\mathcal{P}(\xi')$ eine Wohlordnung von $\mathcal{P}(V_\beta)$, und insbesondere auf $V_{\beta+1}$.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Wenn $\alpha_0 = \beta + 1$, dann haben wir eine Wohlordnung von V_{α_0}. Wenn α_0 ein Nachfolgerordinal ist, kann man also V_{α_0} wohlordnen.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Wenn $\alpha_0 = \beta + 1$, dann haben wir eine Wohlordnung von V_{α_0}. Wenn α_0 ein Nachfolgerordinal ist, kann man also V_{α_0} wohlordnen.
Nehme an $\beta \in \alpha_0$ sei ein Limitordinal, und für alle $\delta \in \beta$ haben wir bereits eine Wohlordnung $<_\delta$ auf V_δ.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Wenn $\alpha_0 = \beta + 1$, dann haben wir eine Wohlordnung von V_{α_0}. Wenn α_0 ein Nachfolgerordinal ist, kann man also V_{α_0} wohlordnen.

Nehme an $\beta \in \alpha_0$ sei ein Limitordinal, und für alle $\delta \in \beta$ haben wir bereits eine Wohlordnung $<_\delta$ auf V_δ.

Dann $V_\beta = \bigcup_{\delta \in \beta} V_\delta$ und für $x, y \in V_\beta$ definieren wir:

$x <_\beta y \iff \rho(x) \in \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge x <_{\rho(x)} y)$ mit $\rho(z) := \bigcap \{\delta \in \beta | z \in V_\delta\}$ für $z \in V_\beta$.

$<_\beta$ ist eine Wohlordnung von V_β per Konstruktion. Intuitiv ist $p(z)$ die "kleinste" Ordinalzahl δ sodass $z \in V_\delta$.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Wenn $\alpha_0 = \beta + 1$, dann haben wir eine Wohlordnung von V_{α_0}. Wenn α_0 ein Nachfolgerordinal ist, kann man also V_{α_0} wohlordnen.
Nehme an $\beta \in \alpha_0$ sei ein Limitordinal, und für alle $\delta \in \beta$ haben wir bereits eine Wohlordnung $<_\delta$ auf V_δ.
Dann $V_\beta = \bigcup_{\delta \in \beta} V_\delta$ und für $x, y \in V_\beta$ definieren wir:
$x <_\beta y \iff \rho(x) \in \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge x <_{\rho(x)} y)$ mit $\rho(z) := \bigcap \{\delta \in \beta | z \in V_\delta\}$ für $z \in V_\beta$.
$<_\beta$ ist eine Wohlordnung von V_β per Konstruktion. Intuitiv ist $p(z)$ die "kleinste" Ordinalzahl δ sodass $z \in V_\delta$.
Linear geordnet: Seien $x \neq y \in V_\beta$. Entweder $\rho(x) = \rho(y) = \delta$, dann verwenden wir ja die Wohlordnung auf V_δ, somit gilt entweder $x < y$ oder $y > x$. Falls oBdA $\rho(x) < \rho(y)$, dann gilt ja $x < y$, also auch in diesem Fall sind x und y vergleichbar.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Jede nicht-leere Teilmenge von V_β hat ein kleinstes Element: Sei $S \subset V_\beta, S \neq \emptyset$.
Fall 1: Für alle Elemente $x, x' \in S$ gilt $\rho(x) = \rho(x')$. Dann verwenden wir die Wohlordnung auf $V_{\rho(x)}$ (wir wissen dass $\rho(x) \neq \beta$, da jedes x aus einem V_δ stammen muss ($\delta \in \beta$), wenn $x \in V_\beta$ wegen der Definition von V_β), um das kleinste Element von S zu finden.

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Jede nicht-leere Teilmenge von V_β hat ein kleinstes Element: Sei $S \subset V_\beta, S \neq \emptyset$.
Fall 1: Für alle Elemente $x, x' \in S$ gilt $\rho(x) = \rho(x')$. Dann verwenden wir die Wohlordnung auf $V_{\rho(x)}$ (wir wissen dass $\rho(x) \neq \beta$, da jedes x aus einem V_δ stammen muss ($\delta \in \beta$), wenn $x \in V_\beta$ wegen der Definition von V_β), um das kleinste Element von S zu finden.
Fall 2: Es gibt mindestens zwei Elemente $x \neq x' \in S$ mit $\rho(x) \neq \rho(x')$. Da Ordinalzahlen wohlgeordnet sind bezüglich $\in$, können wir aus $\{\rho(x)|x \in S\}$ ein kleinstes Element finden, nennen wir dieses γ. Definiere $S' := \{x \in S|\rho(x) = \gamma\} \subset S$. Dies können wir auf den Fall 1 zurückführen, um ein kleinstes Element von S' zu finden, welches dann auch das kleinste Element von S ist. (S' nicht-leer).

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Jede nicht-leere Teilmenge von V_β hat ein kleinstes Element: Sei $S \subset V_\beta, S \neq \emptyset$.
Fall 1: Für alle Elemente $x, x' \in S$ gilt $\rho(x) = \rho(x')$. Dann verwenden wir die Wohlordnung auf $V_{\rho(x)}$ (wir wissen dass $\rho(x) \neq \beta$, da jedes x aus einem V_δ stammen muss ($\delta \in \beta$), wenn $x \in V_\beta$ wegen der Definition von V_β), um das kleinste Element von S zu finden.
Fall 2: Es gibt mindestens zwei Elemente $x \neq x' \in S$ mit $\rho(x) \neq \rho(x')$. Da Ordinalzahlen wohlgeordnet sind bezüglich $\in$, können wir aus $\{\rho(x) | x \in S\}$ ein kleinstes Element finden, nennen wir dieses γ. Definiere $S' := \{x \in S | \rho(x) = \gamma\} \subset S$. Dies können wir auf den Fall 1 zurückführen, um ein kleinstes Element von S' zu finden, welches dann auch das kleinste Element von S ist. (S' nicht-leer).

Wenn $\alpha_0 = \beta$, dann erhalten wir eine Wohlordnung auf V_{α_0}. (Fall α_0 Limitordinalzahl).

"Kurepas Prinzip $\Rightarrow$ Auswahlaxiom"

Jede nicht-leere Teilmenge von V_β hat ein kleinstes Element: Sei $S \subset V_\beta$, $S \neq \emptyset$.
Fall 1: Für alle Elemente $x, x' \in S$ gilt $\rho(x) = \rho(x')$. Dann verwenden wir die Wohlordnung auf $V_{\rho(x)}$ (wir wissen dass $\rho(x) \neq \beta$, da jedes x aus einem V_δ stammen muss ($\delta \in \beta$), wenn $x \in V_\beta$ wegen der Definition von V_β), um das kleinste Element von S zu finden.
Fall 2: Es gibt mindestens zwei Elemente $x \neq x' \in S$ mit $\rho(x) \neq \rho(x')$. Da Ordinalzahlen wohlgeordnet sind bezüglich $\in$, können wir aus $\{\rho(x) | x \in S\}$ ein kleinstes Element finden, nennen wir dieses γ. Definiere $S' := \{x \in S | \rho(x) = \gamma\} \subset S$. Dies können wir auf den Fall 1 zurückführen, um ein kleinstes Element von S' zu finden, welches dann auch das kleinste Element von S ist. (S' nicht-leer).

Wenn $\alpha_0 = \beta$, dann erhalten wir eine Wohlordnung auf V_{α_0}. (Fall α_0 Limitordinalzahl). Damit haben wir eine Wohlordnung definiert, und somit das Wohlordnungsprinzip gezeigt, das äquivalent ist zum Auswahlaxiom. $\square$

Fragerunde