$\mathrm{seq}(\mathfrak{m}) < [\mathfrak{m}]^2$

D. Rechsteiner & F. Lanz

Betreuung: L. Halbeisen

Mai 2020

1 Einleitung

Das Ziel dieser Präsentation ist es ein Modell zu konstruieren indem das Auswahlaxiom fehlschlägt. Das Modell wird ein Modell mit Urelementen sein, das heisst, es ist ein Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Urelementen (ZFU). Zur Erinnerung die Idee hinter ZFU ist die Existenz von Urelementen, welche Objekte sind, die unterscheidbar von der leeren Menge sind, aber keine Elemente enthalten. Die Signatur ist $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFU}} = \{\in, \mathrm{A}\}$, wobei A für die Menge der Urelemente (engl. Atoms) steht. Im nächsten Abschnitt werden wir ein Modell in ZFU konstruieren, so dass eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ existiert, für welche gilt $\mathrm{seq}(\mathfrak{m}) < [\mathfrak{m}]^2$. Die Existenz dieser Kardinalzahl zeigen wir im dritten Abschnitt.

Auf der einen Seite zeigt der Jech-Sochor Einbettungssatz, dass das oben genannte Resultat auch mit ZF konsistent ist. Auf der anderen Seite ist das Auswahlaxiom äquivalent zum Wohlordnungsprinzip . Deshalb können wir alle zwei-elementigen Teilmengen einer Menge A ordnen und somit erhalten wir eine Reihe der Länge zwei. Insbesondere impliziert das Auswahlaxiom, dass $[\mathfrak{m}]^2 \leq \mathrm{seq}(\mathfrak{m})$, wobei $\mathfrak{m}$ die Kardinalität von A ist. Dies ist ein Widerspruch zum oben genannten Resultat und somit ist unser Modell nicht konsistent mit ZFC.

Im folgenden halten wir uns weitgehend an Kapitel 8 aus dem Buch von Lorenz J. Halbeisen [2].

2 Shelah's Modelle erster Art

Shelah's Modelle erster Art sind Permutationsmodelle, wobei die Urelemente Schritt für Schritt per Induktion gebildet werden. Im folgenden Beispiel wird das Modell so konstruiert, dass jedes Urelement eine Reihe von niedrigeren Urelementen kodiert. Ein Modell dieser Art wurde Ursprünglich von Saharon Shelah konstruiert. Er publizierte es in [1], einem gemeinsamen Paper mit Halbeisen.

Wir konstruieren die Urelemente folgendermassen:

(α) A_0 ist eine beliebige unendliche Menge von Urelementen.

(β) $\mathcal{G}_0$ ist die Gruppe aller Permutationen von A_0.

(γ) Konstruiere A_{n+1} induktiv für $n \geq 0$

$$A_{n+1} := A_n \,\dot\cup \left\{ (n+1, p, \epsilon) : p \in \bigcup_{k=0}^{n+1} A_n^k \wedge \epsilon \in \{0,1\} \right\}$$

(δ) $\mathcal{G}_{n+1}$ ist die Untergruppe von der Permutationsgruppe von A_{n+1}, welche alle Permutationen σ enthält, für welche ein $\pi_\sigma \in \mathcal{G}_n$ und ein $\epsilon_\sigma \in \{0,1\}$ existiert, so dass

$$\sigma(x) = \begin{cases} \pi_\sigma(x) & \text{falls } x \in A_n, \\ (n+1, \pi_\sigma(p), \epsilon_\sigma +_2 \epsilon) & \text{falls } x = (n+1, p, \epsilon), \end{cases}$$

wobei für $p = \langle p_0, \ldots, p_l \rangle \in \bigcup_{0 \leq k \leq n+1} A_n^k$, $\pi_\sigma(p) := \langle \pi_\sigma(p_0), \ldots, \pi_\sigma(p_l) \rangle$ und $+_2$ ist die Addition modulo 2.

Wir benutzen A für die Menge aller Urelemente

$$A := \bigcup \{A_n : n \in \omega\}$$

und kennzeichnen die Menge aller Permutationen von A mit $\mathrm{Aut}(A)$. Wir definieren eine Gruppe von Permutationen $\mathcal{G}$ von A

$$\mathcal{G} := \{H \in \mathrm{Aut}(A) : \forall n \in \omega \, (H|_{A_n} \in \mathcal{G}_n)\}.$$

Sei nun $\mathcal{F}$ der normale Filter auf $\mathcal{G}$, welcher von $\{\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) : E \in \mathrm{fin}(A)\}$ erzeugt wird, dann benutzen wir $\mathcal{V}_{S_1}$ für die Klasse aller vererbbarer symmetrischen Mengen, welches per Konstruktion ein Permuatationsmodell ist. Das Modell $\mathcal{V}_{S_1}$ wird Shela's Modell erster Art genannt.

3 Widerspruch zum Auswahlaxiom

Nun wollen wir zeigen, dass das so konstruierte Modell einen Widerspruch zum Auswahlaxiom induziert. Wie in der Einleitung gezeigt, benötigen wir dazu eine Menge, deren Kardinalität dem Wohlordnungsprinzip widerspricht. Genauer werden wir zeigen, dass die Menge der Atome von $\mathcal{V}_{S_1}$ bereits eine solche Menge ist.

Proposition 3.1. *Sei* $\mathfrak{m}$ *die Kardinalität von A. Dann gilt*

$$\mathcal{V}_{S_1} \models seq(\mathfrak{m}) < [\mathfrak{m}]^2.$$

Bemerkung 3.1. Im Beweis benötigen wir mehrmals folgende Tatsache aus B7:
Ist E_x ein Träger von x und $\mathrm{E}_x \subseteq \mathrm{F}_x \in \mathrm{fin(A)}$, dann ist F_x ebenfalls ein Träger von x.

Beweis. Als erstes zeigen wir nur "$\leq$". Dazu beweisen wir, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{V}_{S_1} &: seq(A) \to [A]^2, \\ s = \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle &\mapsto \{(m+l, s, 0), (m+l, s, 1)\}, \\ &\text{wobei } m := \min\Big\{n \Big| \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle \subseteq A_n\Big\}, \end{aligned}$$

injektiv ist. Sei also $\pi \in \mathcal{G}$ und $\mathrm{s} = \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle \in \mathrm{seq(A)}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \pi f(s) &= \pi(\{(m+l, s, 0), (m+l, s, 1)\}) \\ &= \{(m+l, \pi s, 0), (m+l, \pi s, 1)\} \\ &= f(\pi s). \end{aligned}$$

Somit ist f wohldefiniert und in $\mathcal{V}_{S_1}$. Die Injektivität folgt direkt aus der Definition von f.
Für die strikte Ungleichung zeigen wir, dass es keine injektive Funktion von $[\mathrm{A}]^2$ nach seq(A) gibt. Sei $\mathrm{g} \in \mathcal{V}_{S_1}$: $[\mathrm{A}]^2 \to \mathrm{seq(A)}$ beliebig und sei E_g ein endlicher Träger von g, d.h.

$$fix_{\mathcal{G}}(E_g) = \Big\{\pi \in \mathcal{G} : \pi a = a \,\forall a \in E_g\Big\} \subseteq \Big\{\pi \in \mathcal{G} : \pi g = g\Big\} = sym_{\mathcal{G}}(g).$$

Da E_g endlich ist, existiert ein $\mathrm{n}_g \in \omega$, sodass $\mathrm{E}_g \subseteq \mathrm{A}_{n_g}$. Wir können E_g erweitern, sodass folgende Implikation hält:

$$(n+1, \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle, \epsilon) \in E_g \Rightarrow (n+1, \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle, 1-\epsilon), a_0, ..., a_{l-1} \in E_g.$$

Da diese Erweiterung das ursprüngliche E_g enthält, bleibt sie ein endlicher Träger von g. Wir wählen nun zwei Elemente x, y $\in A_0 \setminus E_g$, für die gilt:

$$x \neq y \text{ und } g(\{x, y\}) \neq \langle\ \rangle.$$

Wenn es keine solche Elemente gibt, dann ist g nicht injektiv. Somit können wir annehmen, dass es ein l $\in \omega$ gibt, sodass gilt:

$$g(\{x, y\}) = \langle a_0, ..., a_{l-1} \rangle.$$

Diese Sequenz $\langle a_0, ..., a_{l-1} \rangle$ erfüllt mindestens einen der folgenden Fälle:

$$\begin{aligned}
&(1)\, \forall i \in l(a_i \in E_g),\\
&(2)\, \exists i \in l(a_i \in \{x, y\}),\\
&(3)\, \exists i \in l(a_i \in A_0 \setminus (E_g \cup \{x, y\})),\\
&(4)\, \exists i \in l(a_i \in A \setminus (E_g \cup A_0)).
\end{aligned}$$

Fall 1: Als erstes bemerken wir, dass für alle $\pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(E_g)$ gilt:

$$\pi g(\{x, y\}) = \pi(\langle a_0, ..., a_{l-1} \rangle) = (\langle a_0, ..., a_{l-1} \rangle) = g(\{x, y\}).$$

Wir wählen nun ein $\pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(E_g)$ aus, für welches weiter gilt:

$$\pi x \notin \{x, y\}.$$

Für dieses π folgt sowohl πg({x,y}) = g({x,y}), als auch π\{x, y\} $\neq$ \{x, y\} und g ist somit nicht injektiv.
Fall 2: Da \{x, y\}$\cap E_g = \emptyset$ gilt, können wir ein $\pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(E_g)$ so wählen, dass πx = y und πy = x und somit π\{x, y\} = \{x, y\}. Dies induziert

$$g(\{x, y\}) = g(\pi\{x, y\}).$$

Da wir in Fall 2 sind, gibt es ein i $\in$ l, sodass $a_i \in$ \{x, y\} und somit gilt dank unserer Wahl von π: $a_i \neq \pi a_i$. Wir haben also ein π gefunden, dass einerseits in $\text{fix}_{\mathcal{G}}(E_g)$ ist, aber andererseits kein Element von $\text{sym}_{\mathcal{G}}$(g) ist. Dies widerspricht der Tatsache, dass E_g ein Träger von g ist.
Fall 3: Nach Annahme haben wir ein i $\in$ l($a_i \in A_0 \setminus (E_g \cup$ \{x, y\})). Zusätzlich wählen wir ein beliebiges b $\in A_0 \setminus (E_g \cup$ \{x, y\}), welches nicht gleich a_i ist.

Wir können ein $\pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(\mathrm{E}_g \cup \{\mathrm{x, y}\})$ wählen, sodass $\pi\mathrm{a}_i = \mathrm{b}$. Dank unserer Wahl von π gilt:

$$(i)\, \pi\{x, y\} = \{x, y\} \text{ und somit } g(\{x, y\}) = g(\pi\{x, y\}),$$
$$(ii)\, \pi g(\{x, y\}) \neq g(\{x, y\}) \text{ da } \pi a_i = b \text{ und } b \neq a_i.$$

Mit dem gleichen Argument wie in Fall 2 folgt, dass $\mathrm{E}_g \cup \{\mathrm{x, y}\}$ kein Träger von g ist, weshalb auch E_g kein Träger sein kann. Dies widerspricht erneut der Definition von E_g.
Fall 4: Nach Voraussetzung existiert ein i $\in$ l, sodass

$$a_i \in A \setminus (E_g \cup A_0).$$

Aus der Konstruktion von A folgt, dass dieses a_i von der Form (n+1, s, ϵ) ist, mit n $\in \omega$, s $\in$ seq(A) und $\epsilon \in \{0, 1\}$.
Wir wählen erneut ein $\pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(\mathrm{E}_g \cup \{\mathrm{x, y}\})$; dieses Mal so, dass gilt:

$$\pi(n+1, s, \epsilon) = (n+1, s, 1-\epsilon).$$

Ein solches π existiert, da durch die Erweiterung von E_g die Implikation

$$(n+1, \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle, \epsilon) \notin E_g \Rightarrow (n+1, \langle a_0, ..., a_{l-1}\rangle, 1-\epsilon) \notin E_g$$

gilt. Es gilt analog zu Fall 3, dass $\pi\{\mathrm{x, y}\} = \{\mathrm{x, y}\}$, aber

$$\pi g(\{x, y\}) \neq g(\{x, y\})$$

und somit ebenfalls, dass E_g kein Träger von g sein kann.

Zusammengefasst haben wir in allen vier Fällen gezeigt, dass g entweder nicht injektiv ist oder E_g kein Träger von g sein kann. $\square$

Literatur

[1] Lorenz Halbeisen and Saharon Shelah. Consequences of arithmetic for set theory. *The Journal of Symbolic Logic*, 59(1):30–40, 1994.

[2] Lorenz J Halbeisen. *Combinatorial Set Theory: With a Gentle Inroduction to Forcing.* Springer, Second Edition 2012.