

Shelah's Models of the Second Type

Fatima Rasiti

In this section we want to construct a model s.t.

$$\mathcal{V}_{S_2} \models \text{seq}^{1-1}(m) < 2^m < \text{seq}(m)$$

where m is an infinite cardinal.

Recall:

We know by Theorem 5.24 that for all infinite cardinals m we have $\text{seq}^{1-1}(m) \neq 2^m \neq \text{seq}(m)$.

- If m denotes the cardinality of the set of atoms A of the ordered Mostowski model $\mathcal{V}_M$, then $\mathcal{V}_M \models 2^m < \text{seq}^{1-1}(m) < \text{seq}(m)$.
- If m denotes the cardinality of the set of atoms A of $\mathcal{V}_{S_1}$, then $\mathcal{V}_{S_1} \models \text{seq}^{1-1}(m) < \text{seq}(m) < 2^m$. The second part $\mathcal{V}_{S_1} \models \text{seq}(m) < 2^m$ follows by Theorem 5.21, which says that $\text{fin}(m) < 2^m$ if m is an infinite cardinal. The first part is not difficult to show, since by definition $\text{seq}(m) := \bigcup_{n \in \omega} {}^n m$, and $\text{seq}^{1-1}(m)$ are those sequences of $\text{seq}(m)$ in which no element appears twice.

We know now that the two statements $2^m < \text{seq}^{1-1}(m) < \text{seq}(m)$ & $\text{seq}^{1-1}(m) < \text{seq}(m) < 2^m$

are both consistent with ZF , where m is an infinite cardinal.

Our goal is now to construct a model where we have

$$\text{seq}^{1-1}(m) < 2^m < \text{seq}(m).$$

To do so, we have to introduce some terminology and have to prove some facts.

Idea: The atoms of the permutation model will be the elements of a so-called Fraïssé-limit of finite models.

Construction:

Let $\mathcal{L}$ be the signature containing the binary relation symbol " $<$ " & for each $n \in \omega$ an $n+1$ -ary relation symbol R_n , i.e.

$\mathcal{L} = \{<\} \cup \{R_n : n \in \omega\}$. Let T be the following $\mathcal{L}$ -theory:

(α) $<$ is a linear ordering

(β) for each $n \in \omega$, $R_n(z_0, \dots, z_n) \rightarrow \bigwedge_{0 \leq l, m \leq n} (l \neq m \rightarrow z_l \neq z_m)$.

Notation: For a finite model $N \models T$, we identify N with its domain N , so we just write $N \models T$.

Let $\bar{K} := \{N : N \in \text{fin}(\omega) \wedge N \models T\}$ be the set of all models of T with domain a finite subset of ω .

Note that $\bar{K} \neq \emptyset$, since we can easily construct finite models of T .

If two models N & N' are isomorphic, where $N, N' \in \bar{K}$, we say that N & N' are equivalent and denote it by $N \approx N'$.

Let K be a set of representatives of $\bar{K}/\approx$.

The following Lemma shows that there exists a countable model $M \models T$ which contains infinitely many isomorphic copies of any $N \in K$, s.t. every isomorphism between two submodels of M can be extended to an automorphism of M .

Lemma 8.29:

There exists a model $M \models T$ with domain M s.t.

- $|M| = \omega$,
- $\forall N \in K$, N non-empty, M contains infinitely many submodels which are isomorphic to N ,
- if N, N' are isomorphic finite submodels of M , then the isomorphism between N & N' extends to an automorphism of M .

Proof: Construction: by induction on w , where $\forall n \in w$,
 $M_n \models T$, $|M_n| \geq n$ and $M_n \in \text{fin}(w)$.
 (M_n domain of M_n).

We identify M_n with its domain M_n .

- Let $M_0 := \emptyset$, then $M_0 \models T$ & $\forall N \in K$ with $|N| = 0$, M_0 contains a submodel which is isomorphic to N .
- Assume that for new, we have constructed a model $M_n \models T$ s.t. $\forall N \in K$ with $|N| \leq n$, M_n contains a submodel which is isomorphic to N .
- Let $\{A_i : i \leq p\}$ be an enumeration of $[M_n]^{\leq n}$
 $\{N_k : k \leq q\}$ " of $N \in K$ s.t. $1 \leq |N| \leq n+1$
 $\{j_\ell : \ell \leq u\}$ " of embeddings $j_\ell : M_n|_{A_i} \hookrightarrow N_k$
 where $i \leq p$, $k \leq q$, $|N_k| = |A_i| + 1$.

Now for $\ell \leq u$ & $j_\ell : M_n|_{A_i} \hookrightarrow N_k$ let $a_\ell \in w$ be the least integer s.t. $a_\ell \notin M_n \cup \{a_{\ell'} : \ell' < \ell\}$. Extend $M_n|_{A_i}$ to a model $M_n|_{A_i} \cup \{a_\ell\}$ s.t. $M_n|_{A_i} \cup \{a_\ell\} \cong N_k$ (where by Def. $|N_k| = |A_i| + 1$).

Let $M_{n+1} := M_n \cup \{a_\ell : \ell \leq u\}$ & extend M_{n+1} to a model of T .

We have now that $\forall N \in K$ with $|N| \leq n+1$, M_{n+1} contains a submodel isomorphic to N .

Let $M := \bigcup_{\text{new}} M_n$. M is a model of T with domain w s.t. for every non-empty $N \in K$, M contains infinitely many submodels isomorphic to N .

We only need to show now, that each isomorphism of two finite submodels of M can be extended to an automorphism of M :

Take two finite submodels N_1, N_2 of M s.t. $N_1 \cong N_2$. Let

$j_0 : N_1 \rightarrow N_2$ be an isomorphism & a_1 be the least integer in $w \setminus (N_1 \cup N_2)$. $N_1 \cup N_2 \cup \{a_1\}$ is contained in some M_n & by construction $\exists a'_1 \in M$ s.t.

$M|_{N_1 \cup \{a_1\}} \cong M|_{N_2 \cup \{a'_1\}}$ (in fact, $a'_1 \in M_{n+1}$).

Extend j_0 to $j_1 : N_1 \cup \{a_1\} \rightarrow N_2 \cup \{a'_1\}$ by setting $j_1(a_1) := a'_1$. Let a'_2 be the least integer in $w \setminus (N_1 \cup N_2 \cup \{a_1, a'_1\})$. Similarly, $\exists a_2 \in w$ s.t.

$M|_{N_1 \cup \{a_1, a_2\}} \cong M|_{N_2 \cup \{a'_1, a'_2\}}$ & extend j_1 to $j_2 : N_1 \cup \{a_1, a_2\} \rightarrow N_2 \cup \{a'_1, a'_2\}$.

If we proceed this, we get an automorphism $j : M \rightarrow M$ s.t. $j|_{N_1} = j_1$.

Rmk.: The model M from Lemma 8.29 is a Fraïssé-limit.

M is unique up to isomorphisms.

We just need that $\forall N \in K$, M contains infinitely many isomorphic copies of N , and that M has non-trivial automorphisms, which follows from the fact that every isomorphism between finite submodels of M extends to an automorphism of M .

After this terminology we construct the permutation model $\mathcal{V}_{S_2}$ (Shelah's model of the second type):

Construction:

The set M constitutes the set of atoms A of $\mathcal{V}_{S_2}$ and G is the group of all permutations π of A s.t.

$$M \models x <^M y \iff M \models \pi x <^M \pi y$$

and for every $n \in \omega$: $M \models R_n(z_0, \dots, z_n) \iff M \models R_n(\pi z_0, \dots, \pi z_n)$.

The group G is the group of all automorphisms of M .

Let $\mathcal{F}$ be the normal filter on G generated by $\{\text{fix}(E)_g : E \in \text{fin}(A)\}$

& let $\mathcal{V}_{S_2}$ be the class of all hereditarily symmetric sets.

Notation: For $i+k=n$ & $\bar{y} = \langle y_0, \dots, y_{n-1} \rangle$ we write $R_{i,k}(x, \bar{y})$ instead of $R_n(y_0, \dots, y_{i-1}, x, y_i, \dots, y_{i+k-1})$.
For $i=0$ we write $R_n(x, \bar{y})$.

Shelah's Models of the Second Type: Teil II

Erinnerung 1 Eine Menge $E \subset A$ ist ein Träger von x , falls

$$\text{fix}_G(E) \subseteq \text{sym}_G(x)$$

Lemma 1 Für jede Menge $S \subseteq A$ in $\mathcal{V}_{S_2}$ gibt es einen eindeutigen kleinsten Träger $\text{supp}(S)$. Die Menge $\{S \subseteq A : S \in \mathcal{V}_{S_2} \wedge \text{supp}(S) = E\}$ ist endlich wenn $E \subseteq A$ endlich ist.

Beweis Die Strategie ist zu zeigen, dass der Schnitt zweier Träger von S wieder ein Träger von S ist, also falls $E_1, E_2 \subseteq A$ Träger sind, ist auch $E_0 := E_1 \cap E_2$ ein Träger von S . Der Schnitt aller Träger von S ist dann $\text{supp}(S)$. Zuerst schauen wir uns die Ideen des Beweises intuitiv an. Diese Ideen formalisieren wir danach. Sei S eine Menge $S \subseteq A$ in $\mathcal{V}_{S_2}$ und E_S ein Träger von S . Wir betrachten zwei Urelemente a und b , welche mithilfe von den Relationen und den Elementen von E_S nicht unterscheidbar sind. Dann sind $E_S \cup \{a\}$ und $E_S \cup \{b\}$ isomorphe Submodelle von $\mathbf{M}$. Mit dem vorigem Lemma zeigen wir, dass somit entweder $a, b \in S$ oder $a, b \notin S$ gilt. Dies erlaubt es uns, S eindeutig zu charakterisieren, indem wir alle möglichen Konstellationen der Relationen zwischen Elementen von S mit Elementen von E_S in einer Menge zusammenfassen. Dann betrachten wir zwei verschiedene Träger E_1 und E_2 . Beide geben uns eine Charakterisierung von S . Wir konstruieren dann eine Folge von Urelementen $b_1, \dots, b_k$. Die Konstruktion von $\mathbf{M}$ erlaubt es uns, dass die Konstellation bezüglich E_2 fixiert bleibt und gleichzeitig die Konstellation bezüglich E_1 verändert. Am Ende hat b_k die gleiche Konstellation bezüglich E_1 wie a . Wir zeigen dann, dass diese Konstruktion impliziert, dass die Konstellation bezüglich $E_1 \cap E_2$ schon genug ist um S zu charakterisieren. Daraus folgt dann dass der Schnitt ein Träger ist.

Nach diesem breitem Überblick formalisieren wir zuerst, was mit der Unterscheidbarkeit von a und b mithilfe einer Menge $E \subseteq A$ gemeint ist. Sei $E = \{e_0, \dots, e_{n-1}\} \subseteq A$ eine endliche Menge von Urelementen. Wir betrachten die Menge Θ_E , welche aus allen der folgenden $\mathcal{L}$ -Formeln $\phi_i(x)$ besteht:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &\equiv x = e_j \quad \text{für ein } j \leq n-1, \\ \phi_i(x) &\equiv x <^{\mathbf{M}} e_j \quad \text{für ein } j \leq n-1, \\ \phi_i(x) &\equiv R_{i,k}(x, \bar{e}) \quad \text{für } i+k \leq n \text{ und } \bar{e} \in \text{seq}^{1-1}(E). \end{aligned}$$

Für Urelemente $a \in A$ wir definieren

$$\vartheta_E(a) := \{\phi_i(x) \in \Theta_E : \mathbf{M} \models \phi_i(a)\},$$

also die Menge aller Formeln in Θ_E welche nach Substitution von x mit a in $\mathbf{M}$ gelten. Dies ist sozusagen die Menge aller Relationen, welche zwischen a und den Elementen von E gelten. Falls $\vartheta_E(a) = \vartheta_E(b)$, können wir a und b nicht unterscheiden wenn wir nur deren Relationen mit Elementen von E wissen. Umgekehrt impliziert $\vartheta_E(a) \neq \vartheta_E(b)$ auch $a \neq b$. Zum Beispiel fixiert $\vartheta_E(a)$ die Position von a in der linearen Ordnung $<^{\mathbf{M}}$ bezogen auf E . Wenn es ein $e_j \in E$ gibt mit $a <^{\mathbf{M}} e_j <^{\mathbf{M}} b$ folgt $a \neq b$.

Wenn wir a und b nicht mithilfe E unterscheiden können, gibt es eine Permutation $\pi \in \text{fix}_G(E)$ mit $\pi a = b$. Tatsächlich, wenn $\vartheta_E(a) = \vartheta_E(b)$ gilt, dann sind $E \cup \{a\}$ und $E \cup \{b\}$ isomorph. Der Isomorphismus ist die Identität auf E und a wird auf b abgebildet. Das vorige Lemma

erlaubt es, den Isomorphismus zwischen $E \cup \{a\}$ und $E \cup \{b\}$ zu einem Automorphismus auf $\mathbf{M}$, also einer Permutation π zu erweitern. Sei nun $S \subseteq A$ in $\mathbf{V}_{S_2}$ beliebig und $E_S = \{e_0, \dots, e_{n-1}\} \subseteq A$ ein Träger von S . Die vorigen Argumente implizieren, dass

$$a \in S \Leftrightarrow b \in S$$

gilt, wenn $\vartheta_E(a) = \vartheta_E(b)$. Wir haben nämlich $\pi \in \text{fix}_G(E)$ und somit auch $\pi \in \text{sym}_G(x)$. Somit sind entweder alle Urelemente a' mit $\vartheta_E(a') = \vartheta_E(a)$ in S oder keine. Dass heisst, S ist von der Menge $\{\vartheta_E(a) : a \in S\}$ eindeutig bestimmt. $\{\vartheta_E(a) : a \in S\}$ ist ein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Theta_E))$. Wenn S und S' verschiedene Mengen mit Träger E sind, bekommen wir auch verschiedene Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Theta_E))$. Da es nur endlich viele solche Elemente gibt, folgt der zweite Teil des Lemmas.

Nun zeigen wir, dass $E_0 := E_1 \cap E_2$ ein Träger von S ist, falls E_1 und E_2 Träger von S sind. Falls $E_1 \subseteq E_2$ oder $E_2 \subseteq E_1$, ist dies klar. Nehme an, dass dies nicht der Fall ist. Sei $a_0 \in S$ und betrachte $\vartheta_{E_0}(a_0)$. Das Ziel ist zu zeigen, dass jedes beliebige Urelement $b_0 \in A$ mit

$$\vartheta_{E_0}(b_0) = \vartheta_{E_0}(a_0)$$

auch in S ist. Jeder Automorphismus auf $\mathbf{M}$, welcher E_0 fixiert, bildet a_0 auf ein solches b_0 ab. Da a_0 beliebig war, folgt dann das jeder Automorphismus ganz S auf sich selbst abbildet und somit

$$\text{fix}_G(E_0) \subseteq \text{sym}_G(S).$$

Falls $x = e_j$ in $\vartheta_{E_0}(a_0)$ ist, haben wir $a_0 = e_j = b_0$ und die Aussage stimmt. Somit können wir annehmen, dass keine solche Formel in $\vartheta_{E_0}(a_0)$ ist und darum gilt auch $a_0 \notin E_0$. Zusätzlich, falls

$$\vartheta_{E_1}(b_0) = \vartheta_{E_1}(a_0)$$

sind wir auch fertig, da E_1 ein Träger von S ist.

Wir nehmen nun $\vartheta_{E_1}(b_0) \neq \vartheta_{E_1}(a_0)$ an. Wir konstruieren eine Folge von Urelementen $b_0, b_1, \dots, b_k$ (für ein $k \in \omega$) sodass $\vartheta_{E_1}(b_j)$ immer ähnlicher zu $\vartheta_{E_1}(a_0)$ wird. Schlussendlich gilt $\vartheta_{E_1}(b_k) = \vartheta_{E_1}(a_0)$. Wir verwenden E_2 und die Konstruktion von $\mathbf{M}$ geschickt um sicherzustellen, dass

$$b_l \in S \Leftrightarrow b_{l+1} \in S$$

für alle $l < k$ gilt. Da E_1 ein Träger von S ist, folgt $b_k \in S$ aus $a_0 \in S$. Somit gilt auch $b_0 \in S$ und E_0 ist ein Träger von S . Somit ist $\text{supp}(S) := \bigcap \{E : E \text{ ist Träger von } S\}$ ein Träger und offensichtlich auch der kleinste. Um den Beweis abzuschliessen, illustrieren wir an einem Beispiel, wie wir das nächste Glied der Folge bestimmen.

Wir nehmen an, dass $b_0 \notin E_2$ und es gibt ein $<^{\mathbf{M}}$ -minimales Element $e_i \in E_1 \setminus E_2$ sodass $a_0 <^{\mathbf{M}} e_i <^{\mathbf{M}} b_0$. Wir finden nun ein Element b_1 mit $b_1 <^{\mathbf{M}} e_i$, dass sich sonst bezüglich E_1 und E_2 verhält wie b_0 . Durch die Konstruktion von $\mathbf{M}$ existiert dieses b_1 in M_n , falls $n \geq |E_1 \cup E_2| + 1$ und $E_1 \cup E_2 \subseteq M_{n-1}$ gilt. Da sich keine Relation bezüglich E_2 geändert hat, gilt $\vartheta_{E_2}(b_0) = \vartheta_{E_2}(b_1)$. Da E_2 ein Träger von S ist, folgt aus den vorigen Argumenten, dass $b_0 \in S \Leftrightarrow b_1 \in S$. Gleichzeitig gilt auch $\vartheta_{E_0}(b_0) = \vartheta_{E_0}(b_1)$, da $E_0 \subseteq E_2$. Nun stimmt die Position von b_1 in Bezug auf die Urelemente von E_1 und $<^{\mathbf{M}}$ mit der von a_0 überein. Mit der gleichen Strategie können wir nun die anderen Relationen bezüglich E_1 sukzessive verändern, indem wir $b_2, b_3, \dots, b_k$ konstruieren. Wir machen dies, bis $\vartheta_{E_1}(b_k) = \vartheta_{E_1}(a_0)$ gilt. Da E_1 auch ein Träger von S ist und

$a_0 \in S$, gilt auch $b_k \in S$. Unsere Konstruktion der Folge impliziert somit $b_0 \in S$. Falls $b_0 \in E_2$ gelten würde, hätten wir $b_0 \notin E_1$ und wir könnten analog vorgehen. Wir haben gezeigt, dass $\vartheta_{E_0}(b_0) = \vartheta_{E_0}(a_0)$ impliziert $b_0 \in S$ falls $a_0 \in S$. Somit ist E_0 auch ein Träger und wir sind fertig mit dem Beweis des Lemmas. $\square$

Nun können wir folgende Aussagen über Kardinalitäten beweisen.

Proposition 2 *Sei $\mathfrak{m}$ die Kardinalität der Menge von Urelementen A von $\mathcal{V}_{S_2}$. Es gilt*

$$\mathcal{V}_{S_2} \models \text{seq}^{1-1}(\mathfrak{m}) < 2^{\mathfrak{m}} < \text{seq}(\mathfrak{m}).$$

Beweis Wir zeigen zuerst $\mathcal{V}_{S_2} \models \text{seq}^{1-1}(\mathfrak{m}) < 2^{\mathfrak{m}}$. Wir definieren

$$\Phi(\bar{y}) := \{x \in A : M \models R_n(x, \bar{y})\}.$$

für $\bar{y} = \langle y_0, \dots, y_{n-1} \rangle \in \text{seq}^{1-1}(A)$. Wenn wir zwei Elemente $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \text{seq}^{1-1}(A)$ haben, welche sich in mindestens einer Stelle unterscheiden, gilt $\Phi(\bar{y}_1) \neq \Phi(\bar{y}_2)$. Tatsächlich, betrachte das erste M_n , welches alle Elemente von $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$ enthält. Per Konstruktion von M_{n+1} gibt es ein neues Element $a \in M_{n+1}$, sodass $R_n(a, \bar{y}_1)$ gilt und $R_n(x, \bar{y}_2)$ nicht gilt. Somit ist Φ injektiv. Da die Funktion Φ in $\mathcal{V}_{S_2}$ ist, gilt somit

$$\mathcal{V}_{S_2} \models \text{seq}^{1-1}(\mathfrak{m}) \leq 2^{\mathfrak{m}}$$

Im Vortrag B4 wurde bewiesen, dass $\text{seq}^{1-1}(\mathfrak{m}) \neq 2^{\mathfrak{m}}$ in ZF beweisbar ist und somit haben wir

$$\mathcal{V}_{S_2} \models \text{seq}^{1-1}(\mathfrak{m}) < 2^{\mathfrak{m}}.$$

Im selben Vortrag wurde auch bewiesen, dass $2^{\mathfrak{m}} \neq \text{seq}(\mathfrak{m})$ in ZF beweisbar ist. Darum reicht es zu zeigen, dass $2^{\mathfrak{m}} \leq \text{seq}(\mathfrak{m})$ gilt. Wir konstruieren eine Injektion von $\mathcal{P}(A)$ nach $\text{seq}(A)$, um dies zu zeigen. Die Idee ist, eine Menge $S \subseteq A$ auf eine Folge mit den Elementen $\text{supp}(S)$ abzubilden, da $\text{supp}(S)$ endlich ist. Jedoch kann es mehrere verschiedene Mengen geben, welche den gleichen Träger haben. Da wir aber im letzten Lemma sahen, dass es nur endlich viele dieser Mengen geben kann, verlängern wir die Folge für jede dieser Mengen in unterschiedlicher Weise.

Nun schauen wir uns die Konstruktion dieser Injektion im Detail an. Sei $E \subseteq A$ endlich. Wir konstruieren zuerst eine Nummerierung der Mengen S mit $\text{supp}(S) = E$. Dazu nummerieren wir zuerst die Menge Θ_E vom Beweis des vorigen Lemma. Da $<^{\mathbf{M}}$ eine totale Ordnung ist, können wir die Formeln nach der Anzahl involvierten Elementen und der kanonischen Ordnung bezüglich $<^M$ ordnen. Wir erhalten $\eta_E = \{\phi_0(x), \dots, \phi_{k-1}(x)\}$ für ein $k \in \omega$. Im Beweis des letzten Lemma sahen wir, dass wir jede Menge S eindeutig mit einem Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Theta_E))$ identifizieren können. Darum induziert η_E die Injektion:

$$\Psi_E : \{S \subseteq A : \text{supp}(s) = E\} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}k))$$

$$S_0 \mapsto \{I \subseteq k : \exists a \in S_0(\vartheta_E(a) = \{\phi_i(x) : i \in I\})\}.$$

Nun definieren wir die Injektion Ψ von $\mathcal{P}(A)$ nach $\text{seq}(A)$ mit

$$\Psi(S) := \langle e_0, \dots, e_{n-1}, a, b, \dots, b \rangle$$

wobei:

-
- $a, b \in A$ sind fixierte und verschiedene Urelemente,
 - $E = \{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ ist der kleinste Träger von S und die Nummerierung ist bezüglich $<^{\mathbf{M}}$ geordnet,
 - Die Anzahl b 's am Ende der Folge entspricht der Position von $\Psi_E(S)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}k)$ bezüglich der kanonischen Ordnung.

Falls S und S' verschiedene kleinste Träger haben, werden sie auf verschiedene Elemente abgebildet. Wenn die Träger die gleiche Kardinalität haben, unterscheiden sie sich irgendwo in den ersten n Stellen. Falls nicht, kommt das hineingeschobene a beim der längeren Folge an einer Stelle, wo die kürzere Folge ein b hat. Wenn die kleinsten Träger von S und S' gleich sind, unterscheidet sich die Länge der Folgen. Somit ist Ψ injektiv. Da Ψ per Konstruktion auch in $\mathcal{V}_{S_2}$ ist, sind wir fertig $\square$

Da die Ordnungsrelation $<^{\mathbf{M}}$ auf A dicht ist, kann man $\mathcal{V}_{S_2} \models \text{fin}(\mathbf{m}) < \text{seq}^{1-1}(\mathbf{m})$ beweisen. Dies benötigt ähnliche Argumente wie im Vortrag B8 über das geordnete Mostowski Model.