$seq^{1-1}(\mathfrak{m}) \neq 2^{\mathfrak{m}} \neq seq(\mathfrak{m})$ für $\mathfrak{m} \geq 2$

Seminar "Das Auswahlaxiom" B

Zwyssig, Hruza

March 22, 2020

Dieser Vortrag hat als Ziel zu zeigen, dass $seq^{1-1}(\mathfrak{m}) \neq 2^{\mathfrak{m}} \neq seq(\mathfrak{m})$ für $\mathfrak{m} \geq 2$. Für den endlichen Fall ist es schnell ersichtlich. Dennoch illustrieren wir dies mit folgendem Beispiel. Sein $A = \{a, b\}$ eine Menge mit zwei Elementen. Dann folgt dass

$$\begin{aligned} seq^{1-1}(A) &= \{\emptyset, \langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\} \\ 2^A &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \\ seq(A) &= \{\emptyset, \langle a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, a, a\rangle, \cdots\} \end{aligned}$$

Und diese Mengen haben jeweils unterschiedliche Kardinalität.

Lemma 1. *Sei $\mathfrak{m}$ eine transfinite Kardinalzahl. Dann gilt $2^{\mathfrak{m}} \nleq seq(\mathfrak{m})$.*

Da $seq^{1-1}(\mathfrak{m})$ injektiv auf $seq(\mathfrak{m})$ abgebildet werden kann folgt auch $2^{\mathfrak{m}} \nleq seq^{1-1}(\mathfrak{m})$.

Proof. Angenommen A ist eine Menge der Kardinalität $\mathfrak{m}$. Per Widerspruch nehmen wir an, dass $\mathfrak{m}$ transfinite ist aber $2^{\mathfrak{m}} \leq seq(\mathfrak{m})$, also eine injektive Funktion

$$f_0 \colon 2^A \mapsto seq(A)$$

existiert. Nach Annahme ist $\mathfrak{m}$ transfinite d.h es existiert eine Injektion

$$F_\omega \colon \omega \mapsto A.$$

Nun definieren wir $S_\omega := F_\omega(\omega)$ Angenommen wir finden eine injektive Funktion zwischen einer beliebigen infiniten Ordinalzahl $\alpha \geq \omega$ und A

$$F_\alpha \colon \alpha \mapsto A$$

genau gleich definieren wir wieder $S_\alpha := F_\alpha(\alpha)$. Nach Theorem 5.19 [1] gibt es eine Bijektion zwischen α und $seq(\alpha)$. Damit können wir eine Bijektion $\bar{g} \colon S_\alpha \mapsto seq(S_\alpha)$ konstruieren. Zur Übersicht folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & A \supset S_\alpha := F_\alpha(\alpha) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[dd, hook, two heads, "\bar{g}"] & 2^{S_\alpha} \arrow[dd, hook] \\
\alpha \arrow[ur, hook, "F_\alpha"] \arrow[dr, hook, two heads, "\simeq \text{ by } Thm5.19"'] & & \\
 & seq(S_\alpha) \subset seq(A) & 2^A \arrow[l, hook', "f_0"]
\end{tikzcd}$$

Nun definieren wir

$$\Gamma\colon S_\alpha \to 2^{S_\alpha}$$
$$\Gamma(a) = \begin{cases} x \subseteq S_\alpha & \text{wenn } f_0(x) = \bar{g}(a) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und $M := \{a \in S_\alpha \colon a \notin \Gamma(a)\}$. Nach Definition von M ist $M \in 2^{S_\alpha} \subset 2^A$ und $f_0(M) = \langle b_0, b_1, \cdots, b_n\rangle \in seq(A)\backslash seq(S_\alpha)$.
Das heißt es existiert mindestens ein Element $b_j \notin S_\alpha$, sonst wäre $f_0(M) \in seq(S_\alpha)$. Sei $i \leq n$ der Index für das erste Element von $\langle b_0, b_1, \cdots, b_n\rangle$ sodass $b_i \notin S_\alpha$ und definiere $a_\alpha := b_i$.
Da jede Funktion als Menge von geordneten zweier Tupeln aufgefasst werden kann, können wir F_α um eine Tupel erweitern zu

$$F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{\langle \alpha.a_\alpha\rangle\} \colon \alpha + 1 \to A.$$

Da F_α injektiv ist, ist folglich $F_{\alpha+1}$ injektiv. Wir definieren wieder $S_{\alpha+1} := F_{\alpha+1}(\alpha + 1)$. Wir können dieses Vorgehen beliebig oft wieder holen bis wir zu einer limit ordinal λ kommen. Formal:

$$F_\lambda = \bigcup_{\beta \in \lambda} F_\beta$$

F_λ ist immer noch injektiv. Und somit ist auch

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} F_\alpha$$

eine injektive class function (d.h. eine Klasse von geordneten Paaren von Mengen). Dies ist ein Widerspruch zu Hartogs' Theorem. □

Theorem 1. *Für jede Kardinalzahl* $\mathfrak{m} \geq 1$ *gilt* $seq(\mathfrak{m}) \neq 2^{\mathfrak{m}}$

Proof. Wir wollen zeigen wenn $2^{\mathfrak{m}} = seq(\mathfrak{m})$ dann gilt, auch $2^{\mathfrak{m}+\aleph_0} \leq seq(\mathfrak{m} + \aleph_0)$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Lemma 1. Sei A eine Menge mit $|A| = \mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \geq 1$ und $A \cap \omega = \emptyset$ (z.B. durch Umbenenne der Elemente von A). Nach Annahme existiert eine Bijektion:

$$f_0 \colon 2^A \to seq(A)$$

Für ein fixiertes Element $a_0 \in A$ und $n \in \omega$ definieren wir eine Sequenz mit n mal a_0, $s_n = \langle a_0, ..., a_0\rangle$. Dies definierte uns eine funktion $s \colon \omega \to seq(A)$.

$$\begin{tikzcd}
s^A \arrow[rr, "f_0"] & & seq(A) \\
& \omega \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

setze $g(n) := f_0^{-1}(s_n)$. Durch die Konstruktion ist g injektiv und damit ist 2^A transfinite formal, $\aleph_0 \leq 2^{\mathfrak{m}}$. Nach Propopsition 5.4 in [1] folgt auch $2^{\aleph_0} \leq 2^{\mathfrak{m}}$ und damit existiert eine eine Injektion $h \colon 2^\omega \to 2^A$. Sei $\langle a_1, .., a_k\rangle \circ \langle b_1, ..., b_j\rangle$ die Konkatenation der Sequenzen $\langle a_1, .., a_k\rangle$ und $\langle b_1, ..., b_j\rangle$ dann definieren wir:

$$F \colon 2^A \times 2^\omega \to seq(A \cup \omega)$$
$$\langle x, y\rangle \mapsto f_0(x) \circ 0 \circ f_0(h(y))$$

Beachte, dass f_0 und h injektiv sind und somit ist auch F injektiv. Auf der linken Seite haben wir $|2^A \times 2^\omega| = 2^\mathfrak{m} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{m}+\aleph_0}$ und auf der rechten Seite $|seq(A \cup \omega)| = seq(\mathfrak{m} + \aleph_0)$ und somit folgt wie gewünscht $2^{\mathfrak{m}+\aleph_0} \leq seq(\mathfrak{m} + \aleph_0)$. □

Bevor wir mit dem letzten wichtigen Beweis starten können brauchen wir noch ein scheinbar unzusammenhängendes Lemma.

Definition 1. Sein $n \in \omega$ dann ist $n^* := |seq^{1-1}(n)|$ die Anzahl der sich nicht wiederholenden Sequenzen.

Kombinatorisch ausgedrückt ist:

$$n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

Eine Eigenschaft von n^* die wir später brauchen ist, dass $n^* = n(n-1)^* + 1$ da:

$$\begin{aligned} n(n-1)^* + 1 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} + \frac{n!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \\ &= n^* \end{aligned}$$

Lemma 2. *Wenn $2^k|n^*$ und $2^k|(n+t)^*$ für ein $t \in \omega$ dann gilt $2^k|n^*$.*

proof sketch. Für $k \leq 3$ folgt die Aussage durch explizites ausrechne.
Für $k \geq 3$ benutzen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es existiert ein kleinstes k sodass $2^{k+1}|n^*$ und $2^{k+1}|(n+t)^*$ aber $2^{k+1} \nmid n^*$ oder anders formuliert $0 < t < 2^{k+1}$. Durch geschicktes Abzählen kommen wir dann auf einen Widerspruch da ein Term am Ende gerade und ungerade sein soll.
Da dieser Beweis ab diesem Abschnitt nur noch technisch ist und darin besteht geschickt Terme zusammen zu fassen, verweisen wir auf [1] Seite 121. Da wir sonst nur den Beweis auf Grund des online Seminars mehr oder weniger wörtlich ins Deutsche übersetzen würden, ohne eine Intuition hinzuzufügen □

Damit haben wir alle Tools für die Hauptaussage unseres Vortrags:

Seminar AC B Woche 4 Teil 2

Thm 5.26: Für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{m} \geq 2$ gilt $\quad seq^{1-1}(\mathfrak{m}) \neq 2^{\mathfrak{m}}$.

Zur Erinnerung: $seq^{1-1}(A)$ für eine Menge A ist die Menge der endlichen Folgen ohne Wiederholung der Elemente aus A.

Beweis Thm 5.26:

Teil 1: Reduktionen:

Wir wollen einen Widerspruchsbeweis führen. Dazu nehmen wir an, dass für eine Menge A mit $|A| = \mathfrak{m}$ gilt:

$$|seq^{1-1}(A)| = |\mathcal{P}(A)|$$

Daraus wollen wir folgern, dass eine Injektion $\omega \hookrightarrow A$ existiert, also $\aleph_0 \leq \mathfrak{m}$. Dann ist $\mathfrak{m}$ transfinit, und gemäss Lemma 5.23 gilt $seq^{1-1}(\mathfrak{m}) \neq 2^{\mathfrak{m}}$,

Widerspruch!

Um diese Injektion $\omega \hookrightarrow A$ zu finden, genügt es zu zeigen, dass wir jede endliche Folge

$s_n = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in \mathrm{seq}^{1-1}(A)$ kanonisch

zu einer Folge

$s_{n+1} = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in \mathrm{seq}^{1-1}(A)$ erweitern

können. Dann können wir nämlich beliebig lange endliche Folgen in A konstruieren, und ein Element $n \in \omega$ auf a_n abbilden. Da die Folgen ohne Wiederholung sind, ist diese Funktion injektiv.

Teil 2: Wir lösen die "einfachen" Fälle

Aufgrund der Betrachtungen in Teil 1 nehmen wir nun an, dass wir eine Folge $s_n = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in seq^{1-1}(A)$ der Länge $n \geq 2$ gegeben haben. Wir definieren

$$S_n := \{ a_i : i \in n \}$$

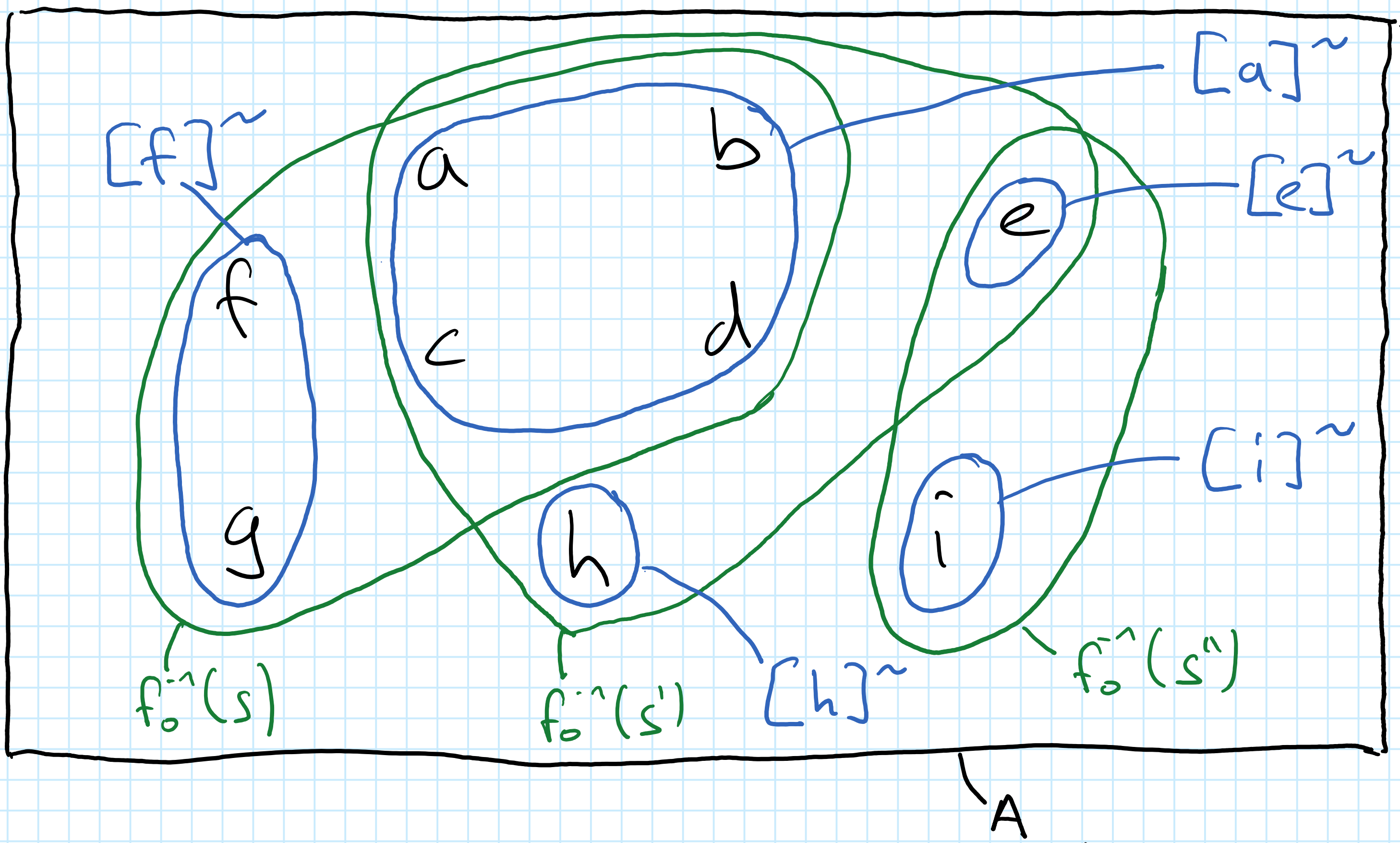
Die Folge s_n erlaubt es uns nun, die Menge $seq^{1-1}(S_n)$ nach Länge und lexikographisch zu ordnen.

Bem: Wir werden nun mehrmals eine Menge ordnen. Dies tun wir, damit wir ein kleinstes Element mit einer bestimmten Eigenschaft auswählen können, und somit das Auswahlaxiom nicht brauchen.

Wir definieren nun die Äquivalenzrelation

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow \forall s \in seq^{1-1}(S_n) : (a \in f_0^{-1}(s) \leftrightarrow b \in f_0^{-1}(s))$$

Diese auf den ersten Blick eher schwer fassbare Definition können wir wie folgt in einem Bild veranschaulichen:



Im obigen Bild seien $a, \dots, i$ Elemente aus A. Die grünen Mengen sind Urbilder von Folgen $s, s', s'' \in seq^{1-1}(S_n)$ unter der Bijektion $f_0 : \wp(A) \to seq^{1-1}(A)$. Die blauen Mengen sind nun die von $\sim$ induzierten Äquivalenzklassen. Intuitiv kann man sich vorstellen, dass die Äquivalenzklassen genau die Teilmengen von A sind, die nicht von Urbildern von Folgen in $seq^{1-1}(S_n)$ "zerrissen" werden.

Nun definieren wir

$$Eq(n) := \{[a]^{\sim} : a \in A\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen.

Die Ordnung auf $seq^{1-1}(S_n)$ induziert dann eine Ordnung auf $Eq(n)$.

Wir definieren nun $k_0 := |Eq(n)|$

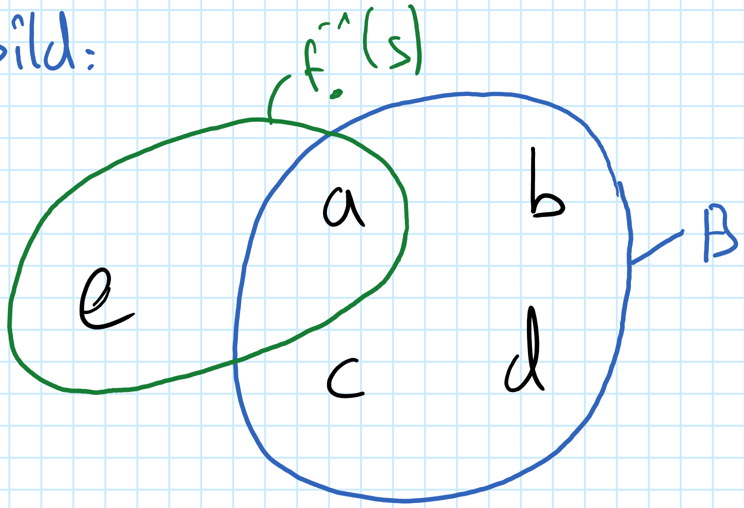
Es gilt $n^* = |seq^{1-1}(S_n)| \leq |\mathcal{P}(Eq(n))| = 2^{k_0}$, da wir mit f_0^{-1} für jedes Element $s \in seq^{1-1}(S_n)$ das Urbild $f_0^{-1}(s) \in \mathcal{P}(A)$ als disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen, also Elementen in $Eq(n)$, schreiben können. Dank dieser Menge an Äquivalenzklassen haben wir eine Injektion $seq^{1-1}(S_n) \hookrightarrow \mathcal{P}(Eq(n))$.

Bemerkung: Intuition zu weshalb wir für jedes $s \in seq^{1-1}(S_n)$ das Urbild $f_0^{-1}(s)$ als Vereinigung von Äquivalenzklassen schreiben können.

① Äquivalenzklassen definieren eine Partition auf A

② Für $B \in Eq(n)$ eine Äquivalenzklasse ist $B \not\subseteq f_0^{-1}(s)$ für ein $s \in seq^{1-1}(S_n)$ nicht möglich.

Bild:

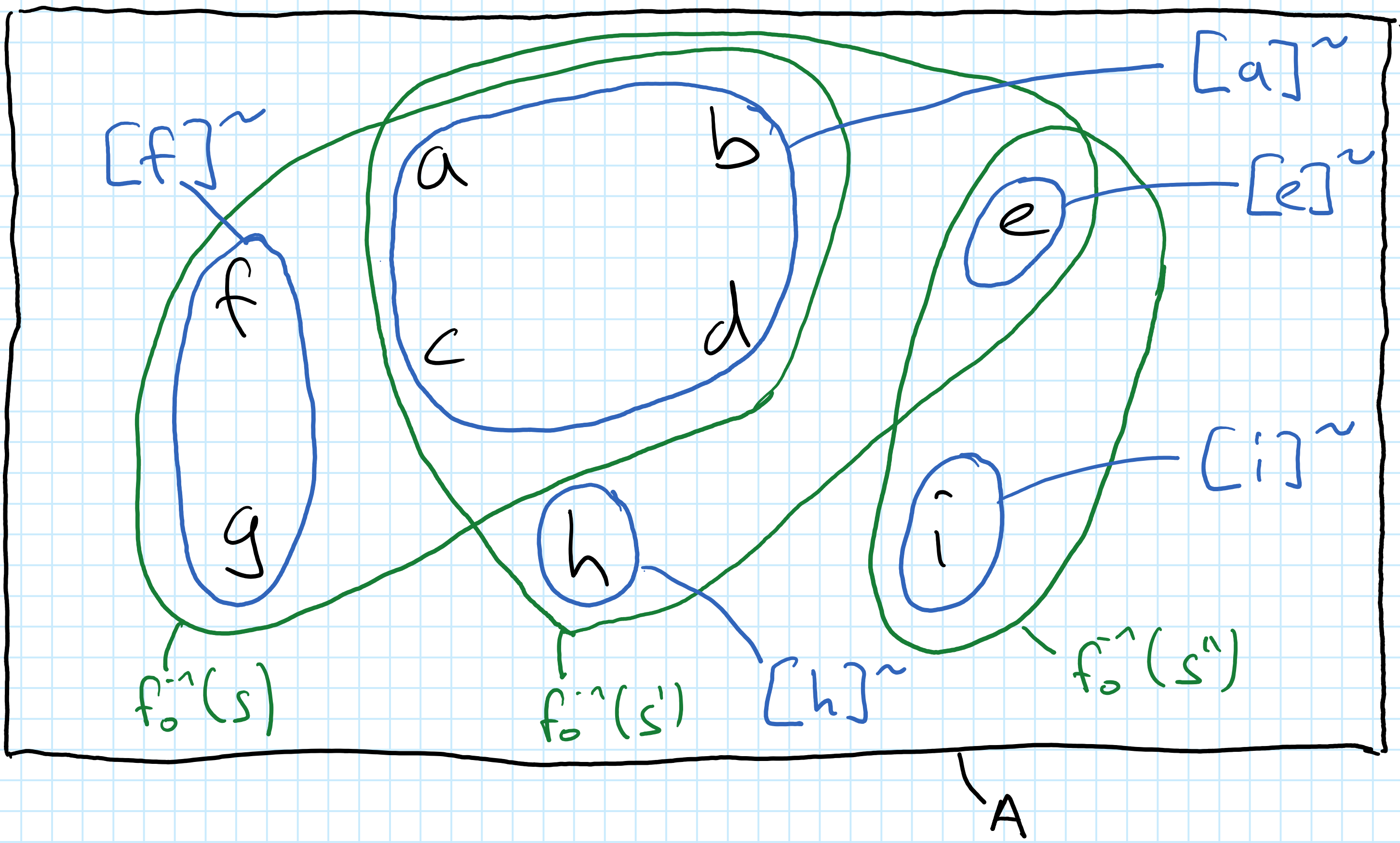


Hier wird B von $f_0^{-1}(s)$ zerrissen, also kann B gemäss Definition von $\sim$ keine Äquivalenzklasse sein.

Für $n^* \leq 2^{k_0}$ gilt entweder $n^* < 2^{k_0}$ oder $n^* = 2^{k_0}$. Wir betrachten nun beide Fälle separat.

Fall 1: $n^* < 2^{k_0}$. Dies bedeutet, es gibt keine Bijektion zwischen $seq^{1-1}(S_n)$ und $\mathcal{P}(Eq(n))$. In anderen Worten, es existiert mindestens eine Menge an Äquivalenzklassen $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(Eq(n))$, deren Vereinigung nicht Urbild eines $s \in seq^{1-1}(S_n)$ unter f_0 ist.

Intuition: In einem einfachen Fall können wir uns dies wie folgt vorstellen:



Wenn in diesem Fall $seq^{1-1}(S_n) = \{s, s', s''\}$, dann wäre z. B. $\{i, f, g\}$ eine Vereinigung von Äquivalenzklassen, die nicht Urbild eines $s \in seq^{1-1}(S_n)$ unter f_0 ist. Hier sehen wir auch, dass dann $f_0(\{i, f, g\}) \notin seq^{1-1}(S_n)$ gilt.

Wenn diese Vereinigung der Elemente in $\mathcal{B}$ nicht Urbild eines $s \in seq^{1-1}(S_n)$ ist, dann ist auch $f_0(\bigcup \mathcal{B}) \notin seq^{1-1}(S_n)$, also existiert ein kleinstes Element a_n in der Folge $f_0(\bigcup \mathcal{B})$, das nicht in S_n ist. Wir definieren $s_{n+1} := s_n {}^\frown \langle a_n \rangle$, und haben unsere gewünschte Folge.

In dieser Argumentation haben wir jedoch ein Problem ignoriert: Auch wenn wir wissen, dass ein solches $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(Eq(n))$ existiert, dürfen wir nicht einfach ein beliebiges $\mathcal{B}$ auswählen.

Die Lösung liegt in den bereits erwähnten Ordnungen. Denn die Ordnung auf $Eq(n)$ induziert eine Ordnung auf $\mathcal{P}(Eq(n))$, und somit wählen wir einfach die kleinste Menge $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(Eq(n))$, deren Vereinigung <u>nicht</u> Urbild eines $s \in seq^{1-1}(S_n)$ ist.

Übersicht: Ordnungen

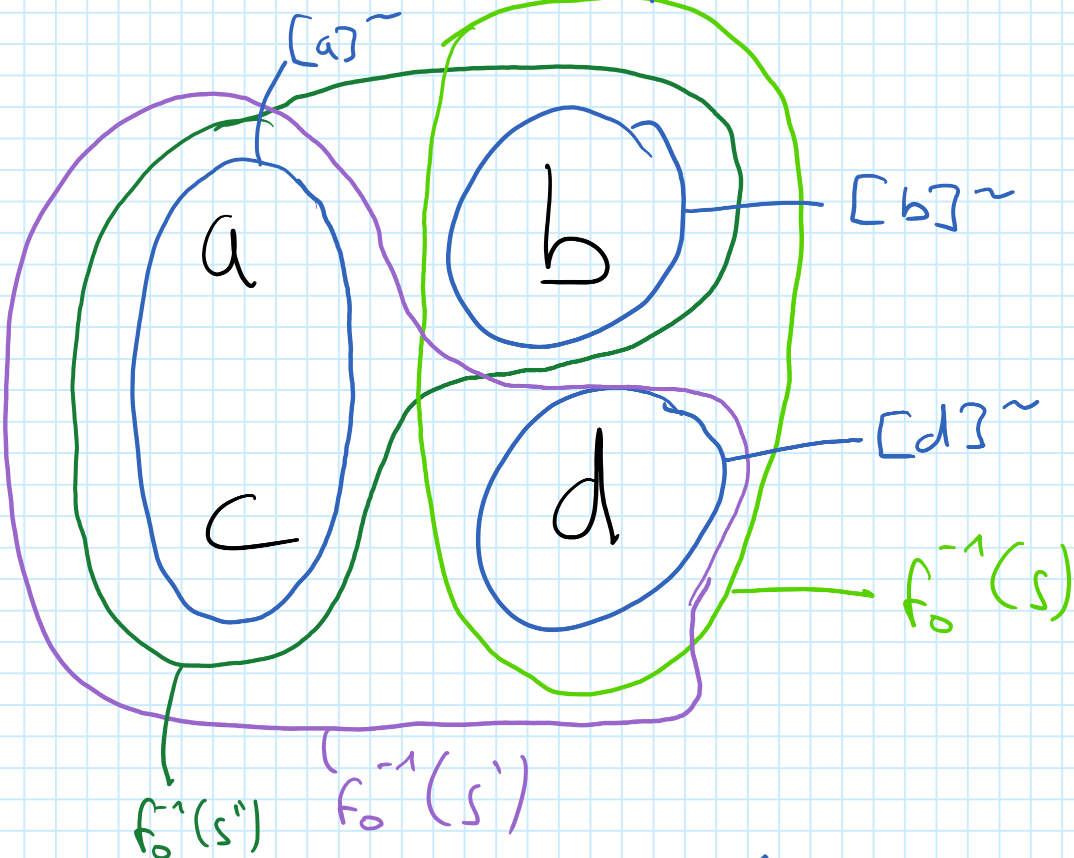
Zu Beginn haben wir lediglich die Folge S_n. Die Ordnungen induzieren wir dann wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, bend right, "\text{induziert Ordnung auf}"'] & seq^{1-1}(S_n) \arrow[r, bend right, "\text{induziert Ordnung auf}"'] & Eq(n) \arrow[r, bend right, "\text{induziert Ordnung auf}"'] & \mathcal{P}(Eq(n))
\end{tikzcd}$$

Fall 2: $n^* = 2^{k_0}$

Intuition: Jede Vereinigung von Äquivalenzklassen ist Urbild eines $s \in seq^{1-1}(S_n)$ unter f_0.

Bild:



In diesem Fall ist

$$[a]^\sim \cup [b]^\sim = f_0^{-1}(s'')$$
$$[a]^\sim \cup [d]^\sim = f_0^{-1}(s')$$
$$[b]^\sim \cup [d]^\sim = f_0^{-1}(s)$$

und $[a]^\sim, [b]^\sim, [d]^\sim$ sind auch Urbilder (unübersichtlich zu zeichnen).

Falls $S_n = A$ sind wir bereits fertig. Nehmen wir also an, dass $S_n \neq A$. Wir wählen ein beliebiges $a \in A \setminus S_n$ aus, und setzen die Konstruktion mit s_n^⟨a⟩ fort (wir versuchen nun also, die Folge s_n^⟨a⟩ zu verlängern). Aus den Bemerkungen zu n^* wissen wir, dass

$$(n+1)^* = \underbrace{\underbrace{(n+1)\cdot \underbrace{n^*}_{\text{gerade}}}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}}$$

gilt.

Dank der Teilbarkeit wissen wir, dass $(n+1)^*$ also keine Zweierpotenz ist, mit s_n^⟨a⟩ befinden wir uns also wieder in Fall 1. Wir verlängern die Folge nun solange, wie wir in Fall 1 sind. Falls ein $a \in A \setminus S_n$ existiert, so dass wir nie mehr im Fall 1 sind, sind wir fertig. Wir nehmen nun also an, dass wir egal welches $a \in A \setminus S_n$ wir wählen, wir immer wieder in Fall 2 landen.

Bemerkung: Sanity check

* Warum dürfen wir hier ein beliebiges $a \in A \setminus S_n$ auswählen? Weil die Konstruktion, die wir am Ende verwenden, nicht mehr von a abhängt.

* Warum "lösen" wir Fall 2 einmal mit einem beliebigen $a \in A \setminus S_n$, wenn wir nacher sowieso wieder in Fall 2 enden?
Weil die Konstruktion benötigt, dass wir zweimal in Fall 2 sind, damit sie funktioniert.

Wir haben nun also folgende Situation:
Für ein beliebiges $a \in A \setminus S_n$ haben wir eine Folge der Länge $n+\ell+1$ wobei $(n+\ell+1)^*$ eine Zweierpotenz ist.
Sei

$$s^a_{n+\ell} = (\underbrace{a_0, \dots, a_{n-1}}_{\text{mit dieser Sequenz } s_n \text{ sind wir gestartet}}, a, \underbrace{a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell}}_{\text{hier waren wir wieder in Fall 1}})$$

hier waren wir in Fall 2 und mussten ein beliebiges $a \in A \setminus S_n$ wählen

Sei zudem

$$\overline{S_n^a} := \{a_0, \dots, a_{n+e}\}$$

Wir machen nun folgende Definition:

Eine Teilmenge von A heisst gut falls sie nicht die Vereinigung von Elementen aus $Eq(n)$ ist.

Mit den selben Überlegungen wie für Fall 1 folgt, dass für eine gute Teilmenge $X \subseteq A$ gilt $f_0(X) \notin seq^{1-1}(S_n)$. Dann gibt es aber wieder ein erstes Element in der Folge $f_0(X)$ welches nicht in S_n ist, und wir sind fertig.

Für den ganzen Rest des Beweises wollen wir also eine gute Teilmenge von A finden.

Wir definieren

$$T_{min} := \{a \in A \setminus S_n : \overline{S_n^a} \text{ ist gut und von kleinstmöglicher Kardinalität}\}$$

Teil 3: Wir lösen den "schlimmsten" Fall

Bemerkung: Übersicht über den Aufbau

Der Rest des Beweises lässt sich in drei Teile gliedern:

① Wir zeigen, dass $T_{min} \neq \emptyset$ ist, also mindestens ein gutes $\bar{S}_n^a$ existiert

② Für jedes $a \in T_{min}$ konstruieren wir eine Folge ohne Wiederholung SEQ^a der Elemente aus $\bar{S}_n^a$, die nur von $\bar{S}_n^a$ abhängt.

③ Aus den guten $\bar{S}_n^a$ und den Folgen SEQ^a konstruieren wir eine gute Teilmenge von A, die nicht von den a abhängt.

Wir zeigen nun also zuerst, dass $T_{min} \neq \emptyset$ ist.

Für jedes $a \in A \setminus S_n$ gilt $a \in \bar{S}_n^a$. Da wir für endliche Mengen A mit $|A| = d$ direkt zeigen können, dass $d^* \neq 2^d$ gilt, können wir also o. B. d. A. annehmen, dass A unendlich ist. Da S_n endlich ist, ist $A \setminus S_n$ unendlich. Zudem ist $Eq(n)$ endlich, weshalb auch $\mathcal{P}(Eq(n))$ endlich ist.

Weil jede Menge $\bar{S}_n^a$ endlich ist, gibt es also unendlich viele davon (für alle $a \in A \setminus S_n$) und somit muss mindestens eine nicht einer Vereinigung von Elementen aus $Eq(n)$ entsprechen.

Somit ist mindestens ein $\bar{S}_n^a$ für $a \in A \setminus S_n$ gut.

Wir folgern, dass $T_{min} \neq \emptyset$. Falls T_{min} gut ist, verwenden wir direkt T_{min}, um den Beweis zu beenden.

Falls T_{min} nicht gut ist, definieren wir $m_T := |\bar{S}_n^a|$ für ein $a \in T_{min}$.
Für jedes $a \in T_{min}$ konstruieren wir nun eine Folge $SEQ^a \in seq^{1-1}(\bar{S}_n^a)$ von Länge m_T, so dass für alle $a, b \in T_{min}$ gilt:

$$\bar{S}_n^a = \bar{S}_n^b \Rightarrow SEQ^a = SEQ^b$$

Sei dafür $a \in T_{min}$ beliebig. Da $a \in T_{min}$ gilt, ist $\bar{S}_n^a$ per Definition von T_{min} gut, weshalb gilt:

$$f_0(\bar{S}_n^a) \notin seq^{1-1}(S_n)$$

Es existiert also ein erstes Element a_n in der Folge $f_0(\bar{S}_n^a)$ welches nicht zu S_n gehört. Nun betrachten wir die Folge $s_n \frown \langle a_n \rangle$, und fügen mit Fall 1 wieder so viele Elemente an, bis wir wieder in Fall 2 landen.
Die entstandene Folge $s_{n+l}^{a_n}$ induziert die Menge ihrer Elemente $\bar{S}_n^{a_n}$.

Bemerkung 1: Die Menge $\bar{S}_n^{a_n}$ muss eine Teilmenge von $\bar{S}_n^a$ sein.

Begründung: Zuerst zeigen wir, dass a_n in $\bar{S}_n^a$ ist. Falls $a_n \notin \bar{S}_n^a$ gälte, so könnten wir mit Hilfe der Folge $f_0(\bar{S}_n^a)$ (insbesondere mit a_n) die Folge s_{n+e}^a erweitern, wir wären also nicht zum zweiten Mal in Fall 2. Dies wäre ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Wenn nun $a_n \in \bar{S}_n^a$ gilt, so muss auch das a_{n+1}, das wir mit Fall 1 finden, in $\bar{S}_n^a$ sein. Denn a_{n+1} ist definiert als das erste Element einer Folge $f_0(X)$, welches nicht in $S_n \cup \{a_n\}$ ist. Dabei ist X eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $Eq(n+1)$. Wenn nun $a_{n+1} \notin \bar{S}_n^a$ gälte, so hätten wir mit $f_0(X)$ ja s_{n+e}^a direkt erweitern können (da Urbilder unter f_0 von $seq^{1-1}(S_n \cup \{a_n\})$ auch Urbilder von $seq^{1-1}(\bar{S}_n^a)$ sind, somit ist X auch eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $Eq(n+\ell)$.

Wir vergleichen nun $\bar{S}_n^{a_n}$ mit $\bar{S}_n^a$. Falls $\bar{S}_n^{a_n} = \bar{S}_n^a$, dann hat $s_{n+e}^{a_n}$ auch Länge m_T, und wir definieren $SEQ^a := s_{n+e}^{a_n}$. Diese Folge hing dabei nur von der Menge $\bar{S}_n^a$ ab, weshalb für $a, b \in T_{min}$ mit $\bar{S}_n^a = \bar{S}_n^b$ wirklich $SEQ^a = SEQ^b$ gilt in diesem Fall.

Falls aber $\bar{S}_n^{a_n} \subsetneq \bar{S}_n^a$, dann ist $\bar{S}_n^{a_n}$ nicht gut (da $\bar{S}_n^a$ kleinstmögliche Kardinalität hat). Wenn $\bar{S}_n^{a_n}$ nicht gut ist, dann ist es nicht die Vereinigung von Elementen aus $E_a(n)$ (dies ist genau die Definition einer "guten" Teilmenge von A). Sei nun $S' := \bar{S}_n^a \setminus \bar{S}_n^{a_n}$, und sei $s^{a_n} := f_0(S')$ die dazugehörige Folge. Wir definieren s' nun als die Folge s^{a_n} ohne Elemente in S'.

Die Menge S' ist gut, da wir sonst

$$\bar{S}_n^{a} = S' \cup \underbrace{\bar{S}_n^{a_n}}_{\text{Vereinigung von Elementen aus } Eq(n)}$$

wäre Vereinigung von Elementen aus $Eq(n)$ wenn S' nicht gut ist

als Vereinigung von Elementen aus $Eq(n)$ schreiben könnten, was ein Widerspruch zu "$\bar{S}_n^{a}$ ist gut" wäre.

Da S' gut ist, gilt

$$f_0(S') \not\subseteq seq^{1-1}(S_n) \subseteq seq^{1-1}(\bar{S}^{a_n}),$$

und sei a' das erste Element in der Folge $f_0(S')$, welches nicht zu $\bar{S}^{a_n}$ gehört. Nun erweitern wir die Folge $s'^\frown\langle a'\rangle$ mit Fall 1 bis sie Länge m_T hat (mit Bem. 1 folgt, dass die Folge wirklich auf $\bar{S}_n^{a}$ definiert ist).

Wir wissen nun, dass $T_{min} \neq \emptyset$ ist, und dass für jedes $a \in T_{min}$ die Menge $\bar{S}_n^a$ gut ist.
Es verbleibt, eine kanonische gute Menge zu finden, also eine, die nicht von der Auswahl von a abhängt.
Dazu werden wir eine Folge $Q_1, \ldots, Q_{m_T - 1}$ von Teilmengen von A definieren, von denen mindestens eine gut ist. Dann können wir die kleinste gute Menge Q_i wählen, und wir haben ohne Auswahlaxiom eine gute Menge gefunden.

Wir definieren also

$$Q_i := \{ b \in A : b \text{ ist das } i\text{-te Element in } SEQ^a \text{ für ein } a \in T_{min} \}$$

Bild zur Definition der Q_i s:

$$
\begin{aligned}
SEQ^a &= \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_{m_T-1} \rangle \\
SEQ^b &= \langle b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i, \ldots, b_{m_T-1} \rangle \\
SEQ^c &= \langle c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_i, \ldots, c_{m_T-1} \rangle \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Q_0 Q_1 Q_i Q_{m_T-1}

wobei $a, b, c, \ldots \in T_{min}$

Als letzten Schritt müssen wir nun die folgende Behauptung beweisen:

<u>Behauptung</u>: Es existiert ein kleinstes $j_0 < m_T$ so, dass Q_{j_0} gut ist.

Beweis der Behauptung: Für ein beliebiges $a \in T_{min}$ definieren wir

$$a^{=} := \{ a' \in A : \bar{S}^{a'} = \bar{S}^{a} \}$$

Kurzer Auffrischer: Was sind nochmal $\bar{S}_n^{a_1}$ und $\bar{S}_n^{a_2}$?
Wir sind ja mit der Folge s_n gestartet.

Da wir s_n nicht kanonisch verlängern konnten, wählten wir ein $a \in A \setminus S_n$, um dann die Folge $s_n {}^\frown \langle a \rangle$ so oft wie möglich kanonisch zu verlängern. Irgendwann können wir aber auch $s_n {}^\frown \langle a \rangle$ nicht mehr kanonisch verlängern, und die Folge, die wir zu diesem Zeitpunkt haben, heisst s^a_{n+e}.
$\bar{S}^a_n$ ist dann die Menge aller Elemente aus s^a_{n+e}.
$S^{a'}_n$ ist genau gleich konstruiert, nur, dass wir $s_n {}^\frown \langle a' \rangle$ verlängern.
Somit ist $a^=$ die Menge aller Elemente aus A, die uns schlussendlich die gleiche Menge $\bar{S}^a_n$ geben, wenn wir sie an s_n anhängen und dann weiter verlängern.

Sei zudem t_0 die kleinste Kardinalität aller Mengen $a^=$ für $a \in T_{min}$.
Falls für ein $i \neq j_0$ gilt $a \in Q_i \cap Q_{j_0}$, dann kann $\bar{S}^a_n$ nicht gut sein,

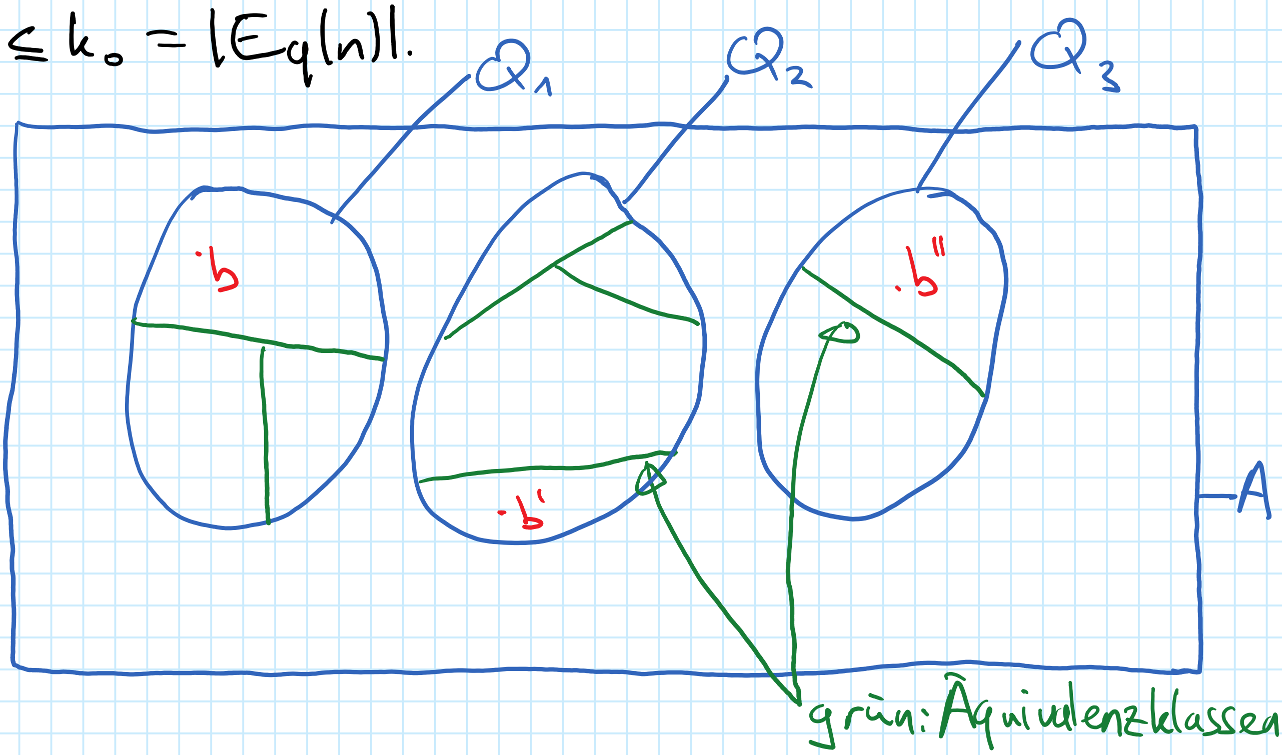
denn a kommt sicher in SEQ^a vor. Falls a auch in SEQ^b für ein $b \in T_{min}$ vorkommt, und $\bar{S}_n^a$ gut wäre, so wäre $\bar{S}_n^b \leq \bar{S}_n^a$ gemäss Bemerkung 1. Daher gälte entweder $\bar{S}_n^b = \bar{S}_n^a$ (und somit $SEQ^a = SEQ^b$), oder $\bar{S}_n^b$ ist gar nicht gut, Widerspruch zu $b \in T_{min}$.

Somit gibt es auch für jedes $a \in T_{min}$ genau ein i_a für das $a \in Q_{i_a}$ gilt. Daraus folgt, dass für $b, b' \in a^=$ mit $b \neq b'$ auch $i_b \neq i_{b'}$ gelten muss.

Wenn nun keine der Mengen Q_i gut ist, ist jede Menge Q_i eine Vereinigung von Elementen aus $Eq(n)$ (das ist die Definition von "gut" sein). Für ein $a \in T_{min}$ gilt für alle $b \in a^=$, dass $\bar{S}_n^a = \bar{S}_n^b$ (Definition der Menge $a^=$), und somit ist auch $\bar{S}_n^b$ gut ($\bar{S}_n^a$ ist gut weil das aus der Definition von T_{min} folgt). Somit sind alle $b \in a^=$ in maximal einer Menge Q_i enthalten, und t_0 ist kleiner gleich der Anzahl Q_is.

Falls alle Q_i nicht gut sind, besteht jedes Q_i aus mindestens einem Element aus $Eq(n)$, und da die Q_is maximal ein $b \in a^=$ enthalten, folgt $t_0 \le k_0 = |Eq(n)|$.

Bild:



Wir zeigen nun, dass tatsächlich $t_0 > k_0$ gilt, woraus dann per Widerspruch folgt, dass mindestens eine Menge Q_i gut sein muss.

Gemäss unseren Annahmen ist $n^* = 2^{k_0}$ (erstes Mal Fall 2) und $(n+\ell+1)^*$ ist auch eine Zweierpotenz (zweites Mal Fall 2).

Zudem gilt $\ell + 1 = m_T - n$.

Bild dazu: Wir betrachten ja die Folge

$$s^a_{n+\ell} = \langle \underbrace{\underbrace{a_0, \dots, a_{n-1}}_{n \text{ Elemente}}, \underbrace{a, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell}}_{m_T - n \text{ Elemente}}}_{m_T \text{ Elemente}} \rangle$$

Dank Lemma 5.25 wissen wir, dass für eine natürliche Zahl t gilt:

$$n^* = 2^k \text{ und } (n+t)^* = 2^{k'} \Rightarrow t \geq 2^k, \text{ also } (*)$$

insbesondere $t > k$

Für jedes $a \in T_{min}$ mit $|a^\frown| = t_0$ und jeder $b \in \bar{S}^a_n \setminus S_n$ (wobei $\bar{S}^b_n$ nicht zwingend gut ist) gilt:

• $|\bar{S}_n^b| = n+t$ für ein $t \geq 1$ ($\bar{S}_n^b$ kommt ja von einer Folge s_{n+t}^b, die die Form s_n ^ b ^ $\underbrace{\langle \dots \rangle}_{\text{irgendeine nichtleere Folge}}$ hat)

und $(n+t)^* = 2^k$ für ein $k > k_0$ (wir haben die Folge s_n ^ $\langle b \rangle$ ja so oft wie möglich verlängert, bis wir wieder in Fall 2 waren, und Fall 2 heisst genau $(n+t)^* = 2^{k'}$).

• entweder gilt $b \in a^=$ oder $\bar{S}_n^b$ ist nicht gut,

denn: - Falls $b \in a^=$, so ist $\bar{S}_n^b = \bar{S}_n^a$, und $\bar{S}_n^a$ ist per Annahme gut.

- Falls $b \notin a^=$, so ist $\bar{S}_n^b \neq \bar{S}_n^a$, und da $\bar{S}_n^b \subseteq \bar{S}_n^a$ ist, kann $\bar{S}_n^b$ nicht gut sein, da $\bar{S}_n^a$ ja minimale Kardinalität unter allen guten Mengen hat.

Somit gilt für eine natürliche Zahl $t' \geq 0$,
dass

$$|\bar{S}_n^a| = m_T = n + \ell + 1 \overset{①}{=} n + t' + t_0$$

Folgen aus der Definition von $\bar{S}_n^a$ und m_T

diese Gleichung ist nicht sofort klar

Begründung für Gleichung ①:

- Für jedes $b \in a^=$ gilt ja $\bar{S}_n^b = \bar{S}_n^a$, also ist $b \in \bar{S}_n^a$, und da $b \notin S_n$ ist per Annahme, folgt $|\bar{S}_n^a| \geq n + |a^=| = n + t_0$. Wir wählen nun $t' \geq 0$ so, dass die Gleichung stimmt.

Nun ist $(n + t' + t_0)^*$ sicher eine Zweierpotenz (denn wir sind ja für $\bar{S}_n^a$ wieder in Fall 2) und $(n+t')^*$ ist auch eine Zweierpotenz (da die Mengen $\bar{S}_n^b \subsetneq \bar{S}_n^a$ nicht gut sind und somit in Fall 2 landen).

Sagen wir nun, dass $(n+t')^* = 2^k$ und $(n+t'+t_0)^* = 2^{k_0}$, wobei $k' > k \geq k_0$.
Dann folgt aus $(*)$, dass $t_0 > k \geq k_0$, und die Behauptung folgt.

$\square$ Behauptung

Wir folgern also, dass Q_{j_0} gut ist, und somit gilt $f_0(Q_{j_0}) \notin seq^{1-1}(S_n)$. Es gibt also ein erstes a_n in der Folge $f_0(Q_{j_0})$ welches nicht zu S_n gehört.
Wir definieren nun $s_{n+1} = s_n {}^\frown \langle a_n \rangle$.
Dann ist s_{n+1} die gesuchte Folge ohne Wiederholung der Länge $n+1$ in A.

$\square$

References

[1] Lorenz J. Halbeisen. *Combinatorial set theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2017. With a gentle introduction to forcing, Second edition of [MR3025440].