Kapitel 8 : Modelle der Mengentheorie mit Urelementen

In diesem Kapitel konstruieren wir Modelle in denen das Auswahlaxiom nicht gilt.

Permutationsmodelle

Wir sprechen jetzt nicht mehr von **ZF** sondern von **ZFU** (engl. **ZFA**), weil wir das Objekt "Urelement" (engl. atom) einführen.

Definition: Ein Urelement ist ein Objekt, welches keine Elemente besitzt, sich aber trotzdem von der leeren Menge $\emptyset$ unterscheidet. Wir schreiben A für eine Menge von Urelementen und wir fügen das Symbol $\mathbf{A}$ der Sprache der Mengenlehre hinzu. Somit ist die Sprache der Mengenlehre mit Urelementen : $\mathcal{L}_{ZFU} = \{\in, \mathbf{A}\}$.

Die beiden Objekttypen "Urelement" und "Menge" sind verschieden. z.B. hat ein Urelement keine Elemente, aber ist nicht gleich $\emptyset$. Weil wir jetzt zwischen zwei Objekttypen unterscheiden müssen, reichen die bekannten Axiome von Kapitel 3 nicht mehr aus und es müssen Axiome abgeändert und hinzugefügt werden:

Axiom der leeren Menge für **ZFU**:

$$\exists x (x \notin A \wedge \forall z (z \notin x))$$

Das Axiom der leeren Menge für **ZF** (Kap.3) lautet: $\exists x \forall z (z \notin x)$. Man erkennt also, dass das Axiom angepasst wird, um auszuschliessen, dass x ein Urelement ist. Dies ist notwendig, weil Urelemente per Definition keine Elemente besitzen (d.h. $\forall z (z \notin x)$ erfüllen), aber auch per Definition nicht $\emptyset$ sind.

Axiom der Bestimmtheit für **ZFU**:

$$\forall x \forall y ((x \notin A \wedge y \notin A) \longrightarrow (\forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y))$$

Auch dieses Axiom erkennen wir von Kapitel 3 in der folgenden Form:
$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$. Es besagt, dass zwei Objekte, welche nicht Urelemente sind und dieselben Elemente besitzen gleich sind. Daraus folgt auch die Eindeutigkeit der leeren Menge. Es existiert also nur ein Objekt $\emptyset$, das keine Elemente besitzt und nicht zu A gehört.

Axiom der Urelemente:

$$\forall x (x \in A \longleftrightarrow (x \neq \emptyset \wedge \neg \exists z (z \in x)))$$

Dieses Axiom besagt, dass ein Objekt genau dann ein Urelement ist, wenn es weder die leere Menge ist noch Elemente besitzt.

Konvention: Da $\emptyset$ kein Urelement sein, kann stipulieren wir $\{z : \varphi(z)\} := \emptyset$ falls $\forall z \; \neg\varphi(z)$.

Dies hat zur Folge, dass wenn x und y keine Elemente gemein haben, ihr Schnitt genau die leere Menge ist; also $\forall z\, \neg(z \in x \wedge z \in y) \rightarrow x \cap y = \emptyset$.
Zudem ist das der Grund weshalb wir das Fundierungsaxiom $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (y \cap x = \emptyset))$ nicht anpassen müssen für **ZFU**.

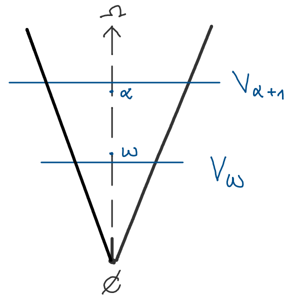
ZFU ist ähnlich aufgebaut wie **ZF**. Als Erinnerung: in Kapitel 3 entwickelten wir die kumulative Hierarchie **V**:

$$V_0 := \emptyset,$$

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \quad \text{falls } \alpha \text{ eine Grenzzahl,}$$

$$V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha),$$

und die Klasse $\mathbf{V} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$.



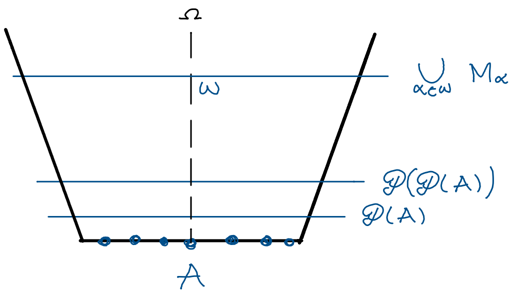
Definition: Anstatt dass wir auf $\emptyset$ "bauen", beginnen wir mit einer Menge von Urelementen A. Wir definieren induktiv (auf Ω in einem Modell von **ZF**) die Mengen

$$M_0 := A,$$

$$M_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} M_\beta \quad \text{falls } \alpha \text{ eine Grenzzahl,}$$

$$M_{\alpha+1} := \mathcal{P}(M_\alpha),$$

und die Klasse $\mathcal{M} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha$.



Als Erinnerung: Eine Grenzzahl ist eine Ordinalzahl ohne Vorgänger. ω ist die kleinste Grenzzahl.

Bemerkung: $\mathcal{M}$ ist ein transitives Modell von **ZFU**, d.h. $\forall y(y \in \mathcal{M} \rightarrow y \subseteq \mathcal{M})$

Definition: $\hat{\mathbf{V}} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{P}^\alpha(\emptyset)$ ist eine Unterklasse von $\mathcal{M}$, ist ein Modell von **ZF** und heisst Kern.
Bemerkung: Wird $\mathcal{M}$ in einem Modell von **ZFC** konstruiert, dann ist $\hat{\mathbf{V}}$ selbst ein Modell von **ZFC**.

Die Axiome von **ZFU** unterscheiden nicht zwischen Urelementen, weshalb eine Permutation auf der Menge aller Urelemente einen Automorphismus induziert. Daher kommt auch der Name "Permutationsmodelle", welche Modelle von **ZFU** sind.

Definition: Sei A eine Menge von Urelementen und $\mathcal{M}$ ein Modell von $\mathbf{ZFU}$ wie oben definiert. Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Permutationen auf A in $\mathcal{M}$. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Untergruppen von $\mathcal{G}$ heisst normaler Filter auf $\mathcal{G}$, falls für alle Untergruppen H,K von $\mathcal{G}$ gilt:

(A) $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$,

(B) $H \in \mathcal{F} \;\wedge\; H \subseteq K \;\Rightarrow\; K \in \mathcal{F}$,

(C) $H \in \mathcal{F} \;\wedge\; K \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; H \cap K \in \mathcal{F}$,

(D) $\pi \in \mathcal{G} \;\wedge\; H \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$,

(E) $\forall a \in A : \{\pi \in \mathcal{G} : \pi a = a\} \in \mathcal{F}$.

Definition: Für jede Menge $x \in \mathcal{M}$ existiert eine kleinste Ordinalzahl α sodass $x \in \mathcal{P}^{\alpha}(A)$. Somit kann man per Induktion auf den Ordinalzahlen für alle Permutationen $\pi \in \mathcal{G}$ (d.h. $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$) und jede Menge $x \in \mathcal{M}$ πx definieren:

$$\pi x = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } x = \emptyset, \\ \pi x & \text{falls } x \in A, \\ \{\pi y : y \in x\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Für alle $x,y \in \mathcal{M}$ und alle $\pi \in \mathcal{G}$ gelten: $\pi x = y \Leftrightarrow x = \pi^{-1} y$ und $x \in y \Leftrightarrow \pi x \in \pi y$. Dies führt zur folgenden Definition:

Definition: Eine bijektive Klassenfunktion $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ist ein $\in$-Automorphismus auf $\mathcal{M}$, falls für alle $x,y \in \mathcal{M}$ gilt: $x \in y \Leftrightarrow F(x) \in F(y)$.

Somit ist $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein $\in$-Automorphismus auf $\mathcal{M}$: Falls $x,y \in \mathcal{M}$ mit $x \in y$, dann ist $y \neq \emptyset$ und es folgt mit obiger Bemerkung, dass $\pi x \in \pi y$ falls $y \in A$ und sonst $\pi x \in \pi y = \{\pi x : x \in y\}$ per Definition.

Definition: Die Symmetriegruppe von $x \in \mathcal{M}$ ist die Gruppe aller Permutationen in $\mathcal{G}$, die x auf x abbilden, d.h. $\mathrm{Sym}_{\mathcal{G}}(x) = \{\pi \in \mathcal{G} : \pi x = x\}$.

Definition: Eine Menge $x \in \mathcal{M}$ ist symmetrisch (bezüglich $\mathcal{F}$) falls die Symmetriegruppe zu $\mathcal{F}$ gehört, d.h. $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F}$.

Bemerkung: Aus (E) der Definition des normalen Filters $\mathcal{F}$ folgt, dass alle Urelemente symmetrisch sind.

Definition: Eine Menge x ist vererbbar symmetrisch falls sowohl x als auch alle Elemente der transitiven Hülle von x (die kleinste transitive Menge, die x enthält) symmetrisch sind.

Als Intuition: Die transitive Hülle einer Menge x besteht aus allen Elementen von x, sowie den Elementen der Elemente, den Elementen der Elemente der Elemente, etc.

Bemerkung: Für die transitive Hülle TC von x gilt: $\pi TC(x) = TC(\pi x)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt per Induktion auf den Rang von x.
Angenommen x ist ein Urelement, dann gilt $x = TC(x)$, da x keine Elemente hat.
Die Behauptung folgt.
Angenommen die Aussage gilt für alle x von Rang n. Betrachten wir ein x von Rang $n+1$. Dann besteht die transitive Hülle von x aus allen Elementen von x, sowie deren transitiven Hüllen, d.h.

$$TC(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} TC(y).$$

Die Induktionsannahme besagt, dass

$$\pi TC(y) = TC(\pi y),$$

weil die Elemente von x höchstens von Rang n sind. Es folgt, dass

$$\pi TC(x) = \pi \left(x \cup \bigcup_{y \in x} TC(y) \right) = \pi x \cup \bigcup_{y \in x} TC(\pi y) = TC(\pi x)$$

$\square$

Bemerkung: Es gilt für alle $x \in \mathcal{M}$ und alle $\pi \in \mathcal{G}$: x ist vererbbar symmetrisch genau dann, wenn πx vererbbar symmetrisch ist.

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} sym_{\mathcal{G}}(\pi x) &= \{ \pi' \in \mathcal{G} : \pi'(\pi x) = \pi x \} \\ &= \{ \pi' \in \mathcal{G} : (\pi^{-1} \pi' \pi) x = x \} \\ &= \pi \{ \pi' \in \mathcal{G} : \pi' x = x \} \pi^{-1} \\ &= \pi \, sym_{\mathcal{G}}(x) \, \pi^{-1}. \end{aligned}$$

Diese Tatsache zusammen mit (D) aus der Definition eines normalen Filters $\mathcal{F}$ bedeutet, dass x genau dann symmetrisch ist, wenn πx es ist.
Es bleibt zu zeigen, dass, wenn alle Elemente von $TC(x)$ symmetrisch sind, auch alle Elemente von $TC(\pi x)$ symmetrisch sind. Die Umkehrung zeigt man analog.
Sei also $y \in TC(\pi x)$.
Mit Hilfe von zwei Bemerkungen weiter oben folgt:

$$\pi^{-1} y \in \pi^{-1} TC(\pi x) = TC(\pi^{-1} \pi x) = TC(x).$$

Per Annahme ist also $\pi^{-1} y$ symmetrisch. Der erste Teil des Beweises gibt uns, dass $y \in TC(\pi x)$ auch symmetrisch ist.

$\square$

Definition: Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ die Klasse aller vererbbar symmetrischen Mengen. $\mathcal{V}$ ist ein Permutationsmodell von ZFU.

Bemerkungen: $\mathbf{V}$ ist transitiv.

Da die Menge aller Urelemente A vererbbar symmetrisch ist ($\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(A) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$ per Definition von $\mathcal{G}$ und Urelemente $a \in A$ nach obiger Bemerkung symmetrisch), gehört A zu $\mathbf{V}$.

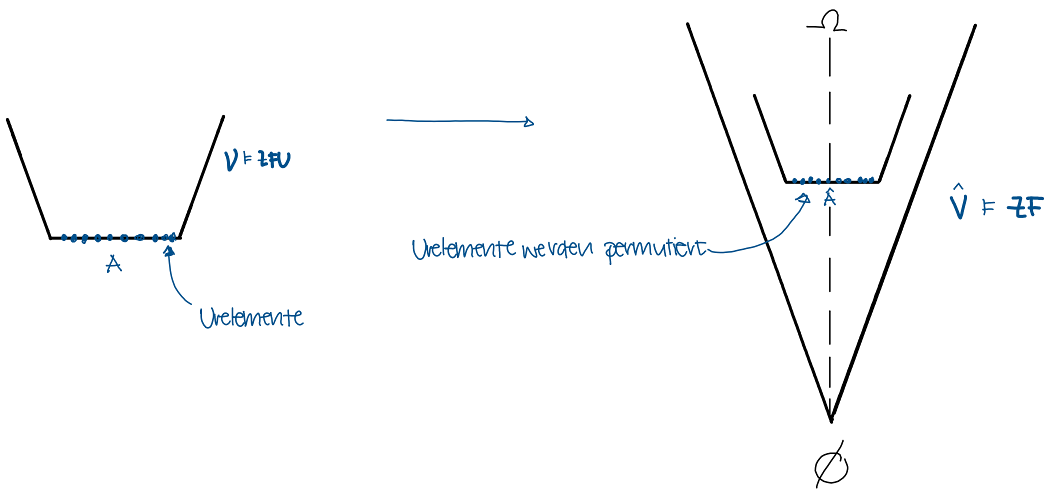
Der Kern $\hat{\mathbf{V}} = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{P}^{\alpha}(\emptyset)$ ist eine Unterklasse von $\mathbf{V}$. Denn einerseits ist $\emptyset$ vererbbar symmetrisch, weil jede Permutation π per Definition $\emptyset$ auf $\emptyset$ abbildet und somit $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\emptyset) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$. Und andererseits kann man per Induktion auf den Ordinalzahlen zeigen, dass $\mathcal{P}^{\alpha}(\emptyset)$ für alle Ordinalzahlen vererbbar symmetrisch ist.

Jede Permutation $\pi \in \mathcal{G}$ (d.h. $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$), die nicht die Identität ist, ist ein nichttrivialer $\in$-Automorphismus auf $\mathbf{V}$. D.h. $\pi|_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ ist ein wohldefinierter Automorphismus mit $x \in y \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)$ für alle $x, y \in \mathbf{V}$ und es existiert ein $x \in \mathbf{V}$ sodass $\pi(x) \neq x$.

Andererseits sind alle $\in$-Automorphismen von Modellen von **ZF** trivial. Man kann per Induktion auf α Folgendes zeigen:

Fakt 8.1: Für jede Menge $x \in \hat{\mathbf{V}}$ und jedes $\pi \in \mathcal{G}$ gilt: $\pi(x) = x$.

Permutationsmodelle sind nicht Modelle von **ZF**, da sie auf Mengen von Urelementen basieren, anstelle von $\emptyset$.
Der Einbettungssatz von Jech-Sochor 17.2 ermöglicht aber die Einbettung von beliebig grossen Fragmenten eines Permutationsmodelles in ein Modell von **ZF**.



Die meisten bekannten Permutationsmodelle sind von der folgenden Form:

Definition: Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Permutationen auf A und sei I eine Familie von Teilmengen von A (z.B. $I = fin(A)$). I ist ein normales Ideal falls für alle Teilmengen $E, F \subset A$ gilt:

(a) $\emptyset \in I$,

(b) $E \in I \wedge F \subset E \Rightarrow F \in I$,

(c) $E \in I \wedge F \in I \Rightarrow E \cup F \in I$,

(d) $\pi \in \mathcal{G} \wedge E \in I \Rightarrow \pi E \in I$,

(e) $\forall a \in A : \{a\} \in I$.

Definition: Sei $S \subseteq A$. Definiere

$$fix_g(S) = \{ \pi \in \mathcal{G} : \pi a = a \text{ für alle } a \in S \}.$$

Bemerkung: Sei $\mathcal{F}$ der Filter auf $\mathcal{G}$ der von den Untergruppen $fix_g(E)$ für $E \in I$ generiert wird. Das heisst, jede Gruppe von Permutationen die alle Elemente von E oder einer Obermenge von E fixieren ist in $\mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein normaler Filter.

Bemerkung: x ist symmetrisch genau dann, wenn eine Menge $E_x \in I$ von Urelementen existiert mit $fix_g(E_x) \subseteq sym_g(x)$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei x symmetrisch, d.h. $sym_g(x) \in \mathcal{F}$. Somit existiert eine Menge $E_x \in I$ mit $E \subseteq E_x$, sodass $fix_g(E) = sym_g(x)$. Per Definition von I gilt $E \in I$, und $E \subseteq E_x$ impliziert $fix_g(E_x) \subseteq fix_g(E)$. Es folgt: $fix_g(E_x) \subseteq sym_g(x)$ für ein $E_x \in I$.

"$\Leftarrow$" Existiert eine Menge von Urelementen $E_x \in I$ mit $fix_g(E_x) \subseteq sym_g(x)$, dann existiert auch eine Menge $E \subseteq E_x$ mit $fix_g(E) = sym_g(x)$. Man erhält sie durch das Weglassen von Urelementen (von E_x), welche fixiert werden müssen, was der Menge $fix_g(E_x)$ Permutationen hinzufügt. Da $E \in I$, gilt $sym_g(x) \in \mathcal{F}$ und somit ist x symmetrisch.

$\square$

Definition: E_x wie in der Behauptung definiert heisst Träger von x.

Bemerkung: Ist E_x ein Träger von x und $E_x \subseteq F_x \in I$, dann ist F_x auch ein Träger von x. Dies folgt aus der Tatsache, dass $E_x \subseteq F_x$ impliziert, dass $fix_g(F_x) \subseteq fix_g(E_x)$, womit gilt $fix_g(F_x) \subseteq sym_g(x)$.

Konsistenz der Resultate mit ZF

Als Nächstes schauen wir uns die Relationen zwischen einigen Mengen in bestimmten Permutationsmodellen von ZF an. Dafür brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei $\mathcal{V}$ ein Permutationsmodell mit einer Menge A von Urelementen und sei m eine Menge in $\mathcal{V}$. Sei

$$\mathfrak{C}(m) := \{ x \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \vDash |x| = |m| \}$$

Dann ist $\mathfrak{C}(m)$ meist eine Klasse in $\mathcal{V}$. Die Kardinalität von m in $\mathcal{V}$ ist definiert als

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{C}(m) \cap \mathcal{P}^{\alpha}(A) \cap \mathcal{V},$$

wobei α die kleinste Ordinalzahl ist sodass $\mathfrak{C}(m) \cap \mathcal{P}^{\alpha}(A) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Beispiel: Sei m eine Menge in einem Permutationsmodell $\mathcal{V}$ (z.B. die Menge aller Urelemente) mit

$$\mathcal{V} \vDash |\mathrm{seq}(m)| < |\mathrm{fin}(m)|,$$

womit auch

$$\mathcal{V} \vDash \mathrm{seq}(\mathfrak{m}) < \mathrm{fin}(\mathfrak{m})$$

gilt. Der Einbettungssatz von Jech-Sochor besagt, dass ein Modell $\hat{\mathcal{V}}$ von ZF und eine Menge $\hat{m}$ mit

$$\hat{\mathcal{V}} \vDash |\mathrm{seq}(\hat{m})| < |\mathrm{fin}(\hat{m})|,$$

existieren. Somit gilt wiederum

$$\hat{\mathcal{V}} \vDash \mathrm{seq}(\hat{\mathfrak{m}}) < \mathrm{fin}(\hat{\mathfrak{m}}),$$

wobei $\hat{\mathfrak{m}}$ die Kardinalität der Menge $\hat{m}$ ist.

Der Einbettungssatz von Jech-Sochor ermöglicht es uns jede Relation zwischen Mengen in einem Permutationsmodell in ein wohlfundiertes Modell zu übersetzen. Das bedeutet, um zu zeigen, dass eine Relation zwischen Kardinalzahlen mit ZF konsistent ist, genügt es ein Permutationsmodell zu finden, in welchem die Relation zwischen den entsprechenden Mengen hält. Von diesem Konzept wird im nächsten Teil Gebrauch gemacht.

Fraenkel's Permutationsmodelle

1 Das amorphe (oder auch 'erste') Fraenkel Modell

Aufbau: Seien A eine abzählbar unendliche Menge (die Urelemente)
$\mathcal{G}$ die Gruppe aller Permutationen von A
I_{fin} die Menge aller endlichen Teilmengen von A

I_{fin} ist ein normales Ideal, da

1 Die leere Menge ist eine endliche Teilmenge von A $(\emptyset \in I_{fin})$

2 Eine Teilmenge einer endlichen Teilmenge von A ist wieder eine endliche Teilmenge von A $(E \in I_{fin},\ F \subseteq E \Rightarrow F \in I_{fin})$

3 Die Vereinigung zweier endlicher Teilmengen von A hat ebenfalls endliche Kardinalität und ist eine Teilmenge von A $(E, F \in I_{fin} \Rightarrow E \cup F \in I_{fin})$

4 Für $\pi \in \mathcal{G}$, $E \in I_{fin}$ gilt: $|\pi E| = E$, außerdem gilt $\pi E \subseteq A$ und somit $\pi E \in I_{fin}$

5 Jedes Urelement ist eine endliche Teilmenge von A, also $\{a\} \in I_{fin}$ $\forall a \in A$

alle erfüllt sind.

Somit ist der von I_{fin} erzeugte Filter $\mathcal{F}$ ein normaler Filter.

Sei nun V_{F_0} (F für Fraenkel) das zugehörige Permutationsmodell

d.h. alle vererbbar symmetrischen Mengen/Fkt. in Bezug auf $\mathcal{F}$

Bemerkung: Eine Menge x gehört zu V_{F_0} $\Longleftrightarrow$ x ist symmetrisch <u>und</u> jedes $y \in x$ gehört ebenfalls zu V_{F_0}

(folgt aus $TC(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} TC(y)$)

Erinnerung: Eine Menge S heisst transfinit, falls $\aleph_0 \leq |S|$.
Falls dies nicht der Fall ist, heisst S D-endlich

Nun können wir einige Resultate zeigen:

Lemma 8.2 Sei $E \in I_{fin}$.
Jede Menge $S \subseteq A$ mit Träger E ist <u>entweder</u> endlich <u>oder</u> ihr Komplement $A \setminus S$ ist endlich.
Weiter gilt, falls S endlich ist, $S \subseteq E$ und, falls $A \setminus S$ endlich ist, $A \setminus S \subseteq E$

Beweis: Sei also $S \subseteq A$ mit Träger E, d.h. $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(S)$

Damit gilt $\forall \pi \in \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E)\ \forall a \in A : \pi a \in S \Leftrightarrow a \in S$

($\pi \in \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) \Rightarrow \forall a \in E: \pi a = a$
Ausserdem $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(S) \Rightarrow \pi S = S$, also $a \in S \Leftrightarrow \pi a \in S$)

Falls S ein Element $a_0 \in A \setminus E$ enthält, so sind alle Elemente von $A \setminus E$ in S, da Permutationen in $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E)$ a_0 zu beliebigen anderen Elementen von $A \setminus E$ schicken können.

da alle Permutationen von A erlaubt sind, solange die Elemente von E fixiert werden.

Somit gilt entweder $S \subseteq E$ oder $(A \setminus S) \subseteq E$. $\square$

Aus Lemma 8.2 folgt folgendendes Ergebnis:

Sei $\mathfrak{m} = |A|$. Dann gilt $V^{a}_{F_0} \models \left(2^{2^{\mathfrak{m}}}\right)^{\aleph_0} = 2^{\mathrm{fin}(\mathfrak{m})}$

Beweis: Lemma 8.2 $\Rightarrow$ Jede Teilmenge von A ist endlich oder co-finit ($A \setminus S$ endlich)
Also hat jede endliche Teilmenge von A ein unendliches Komplement in A und es gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{\mathfrak{m}} = 2 \cdot \mathrm{fin}(\mathfrak{m})$.

Mit Hilfe von Läuchli's Lemma (für jede unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ gilt $(2^{\mathrm{fin}(\mathfrak{m})})^{\aleph_0} = 2^{\mathrm{fin}(\mathfrak{m})}$) erhalten wir

$$\left(2^{2^{\mathfrak{m}}}\right)^{\aleph_0} = \left(2^{\mathrm{fin}(\mathfrak{m})}\right)^{2 \cdot \aleph_0} = 2^{\mathrm{fin}(\mathfrak{m})}$$

$\square$

Ein weiteres, aus Lemma 8.2 folgendes, Resultat ist:

Proposition 8.3: Sei A die Menge der Urelemente und $\mathfrak{m}$ ihre Kardinalität.
Dann gilt $\mathcal{V}^{e}_{F_0} \models \aleph_0 \nleq \mathfrak{m}$

Beweis: Falls eine Injektion $f: \omega \to A$ existieren würde, wäre
$S := \{ f(2n) : n \in \omega \}$ wäre sowohl S als auch $A \setminus S$ unendlich,
was ein Widerspruch zu Lemma 8.2 wäre
$\square$

Insbesondere gibt es in $\mathcal{V}^{e}_{F_0}$ unendlich viele D-endliche Mengen, da jedes Urelement eine D-endliche Menge ist

Ausserdem ist es in ZF nicht beweisbar, dass jede D-endliche Menge endlich ist.
Zum Beispiel könnte A D-endlich sein, aber A ist per Definition unendlich.

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass für jede unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$
$2^{\aleph_0} \leq 2^{\operatorname{fin}(\mathfrak{m})}$ gilt.

Allerdings kann in $\mathcal{V}^{e}_{F_0}$ die Potenzmenge einer unendlichen Menge D-endlich sein.
Dies bedeutet, dass selbst für unendliche Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ die Ungleichung
$\aleph_0 \leq 2^{\mathfrak{m}}$ im Allgemeinen <u>nicht</u> beweisbar ist (in ZF), siehe:

Proposition 8.4: Sei A die Menge der Urelemente und $\mathfrak{m}$ ihre Kardinalität.
Dann gilt $\mathcal{V}^{e}_{F_0} \models \aleph_0 \nleq 2^{\mathfrak{m}}$

Insbesondere ist es in ZF nicht beweisbar, dass die Potenzmenge einer unendlichen Menge transfinit ist.

Beweis: Angenommen es existiert eine Injektion $f: \omega \to \mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{V}^{e}_{F_0}$

da $E_f \in F_{fin}$

Dann ist f symmetrisch und es existiert ein endlicher Träger $E_f \subseteq A$ von f, d.h. $\operatorname{fix}_G(E_f) \subseteq \operatorname{sym}_G(f)$

Nun sei $n \in \omega$, sodass $\operatorname{fix}_G(E_f) \nsubseteq \operatorname{sym}_G(f(n))$. Ein solches n existiert aufgrund von Lemma 8.2, da E_f Träger von nur endlich vielen Teilmengen sein kann (es können $2^{|E_f|}$ Mengen eine Teilmenge von E_f sein und von weiteren $2^{|E_f|}$ Mengen kann das Komplement eine Teilmenge von E_f sein).

Für dieses $n \in \omega$ existiert nun $\pi \in fix_g(E_f)$, sodass $\pi f(n) \neq f(n)$
($da \; fix_g(E_f) \nsubseteq \widehat{sym_g}(f(n))$)

da $n \in V^e_{F_0}$

Fakt 8.1 impliziert $\pi n = n$ und somit auch $f(\pi n) = f(n)$.

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von E_f, es kann also keine Injektion von ω auf $\mathcal{P}(A)$ in $V^e_{F_0}$ geben.

E_f war beliebiger Träger, falls f in $V^e_{F_0}$ ist, muss ein Träger von f existieren

$\square$

Zu einem früheren Zeitpunkt haben wir Proposition 5.22 (Falls $2^m = n \cdot fin(m)$ für eine natürliche Zahl n, dann gilt $n = 2^k$ für irgendein $k \in \omega$) bewiesen.
In $V^e_{F_0}$ gilt auch eine Art Umkehrung dieser Proposition:

Proposition 8.5 Für jede Zahl $n = 2^k$ mit $k \in \omega$ existiert eine Menge A_k in $V^e_{F_0}$, sodas $V^e_{F_0} \models |\mathcal{P}(A_k)| = |n \times fin(A_k)|$

Beweis: Falls $n = 2^0$ stimmt die Aussage für alle endlichen Mengen A_0 in $V^e_{F_0}$, da $|\mathcal{P}(A_0)| = 2^{|A_0|} = |fin(A_0)| = |n \times fin(A_0)|$.

Sei nun also $k \in \omega \setminus \{0\}$ und $n = 2^k$. Sei weiter A die Menge der Urelemente in $V^e_{F_0}$ und $A_k := k \times A$.
Lemma 8.2 $\Rightarrow$ $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot fin(A)$ und somit

$$|\mathcal{P}(A_k)| = |\mathcal{P}(k \times A)| = |\mathcal{P}(A)^k| = |(2 \times fin(A))^k| = \underset{\displaystyle |n \times fin(A_k)|}{\underset{\shortparallel}{|2^k \times fin(A)^k|}}$$

$\square$

2 Das zweite Fraenkel Modell

Aufbau: Seien $P_n := \{a_n, b_n\}$ $\forall n \in \omega$, paarweise disjunkt

$A := \bigcup_{n \in \omega} P_n$ die Menge der Urelemente

$\mathcal{G}$ die Gruppe aller Permutationen von A die die P_n's in ihrer Form erhalten, d.h. $\pi(\{a_n, b_n\}) = \{a_n, b_n\}$ $\forall n \in \omega$ $\forall \pi \in \mathcal{G}$

I_{fin} die Menge aller endlichen Teilmengen von A

I_{fin} ist nun wieder ein normales Ideal, da

1. $\emptyset \in I_{fin}$
2. $E \in I_{fin}$, $F \subseteq E \Rightarrow F \in I_{fin}$ $\quad (|F| \leq |E| < \infty,\ F \subseteq E \subseteq I_{fin})$
3. $E \in I_{fin}$, $F \in I_{fin} \Rightarrow E \cup F \in I_{fin}$ $\quad (|E \cup F| \leq |E| + |F| < \infty,\ (E \cup F) \subseteq I_{fin})$
4. $\pi \in \mathcal{G}$, $E \in I_{fin} \Rightarrow \pi E \in I_{fin}$
5. $\forall P_n \in A$: $P_n \in I_{fin}$

erfüllt sind. und somit ist der von I_{fin} erzeugte Filter ein normaler Filter (gleiches Vorgehen wie bei $V^{e}_{F_0}$).

Das zugehörige Permutationsmodell wird zweites Fraenkel Modell, kurz $V^{e}_{F_2}$, genannt.

Folgendes Theorem beschreibt die wichtigsten Eigenschaften des Modells:

Theorem 8.6: a) $\forall n \in \omega$: P_n gehört zu $V^{e}_{F_2}$

b) $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ gehört zu $V^{e}_{F_2}$. Insbesondere ist $\{P_n : n \in \omega\}$ abzählbar in $V^{e}_{F_2}$

c) Es existiert keine Auswahlfunktion auf $\{P_n : n \in \omega\}$. Insbesondere scheitert $C(\aleph_0, 2)$ in $V^{e}_{F_2}$, was $ZF \nvdash C(\aleph_0, 2)$ bedeutet.

Beweis: a) Sei $\pi \in \mathcal{G}$ und $n \in \omega$. Per Definition von $\mathcal{G}$ gilt $\pi P_n = P_n$. Somit sind alle P_n symmetrisch (da $\forall n \in \omega$: $sym_{\mathcal{G}}(P_n) = \mathcal{G}$) und da P_n eine Menge ~~w~~ bestehend aus Urelementen ist, ist P_n vererbbar symmetrisch und somit in $V^{e}_{F_2}$

b) $\forall \pi \in \mathcal{G}$: $\pi(\langle P_n : n \in \omega \rangle) = \langle \pi P_n : n \in \omega \rangle = \langle P_n : n \in \omega \rangle$ was zusammen mit a) zeigt, dass $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ vererbbar symmetrisch ist

c) Angenommen es existiert eine Auswahlfunktion auf $\bigcup_{n\in\omega} P_n$, die zu $V^{\varrho}_{F_2}$ gehört (also $f: \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} P_n$, sodass $f(n) \in P_n \ \forall n \in \omega$).

Da f zu $V^{\varrho}_{F_2}$ gehört, existiert ein endlicher Träger $E_f \in I_{fin}$ $\; E_f = \{a_0, b_0, \dots, a_k, b_k\}$

kann so gewählt werden, weil für alle $n > k$ die Permutation innerhalb der P_n's beliebig ist.

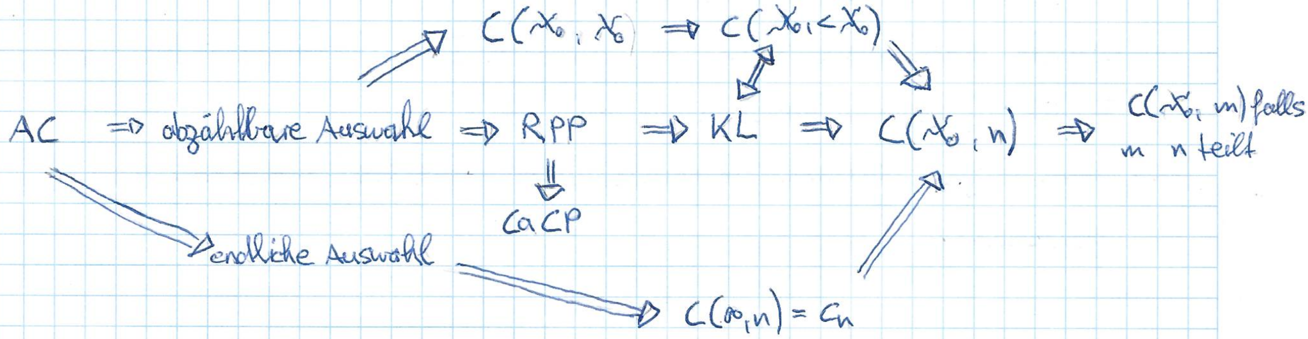
Sei nun $\pi \in \mathrm{fix}_g(E_f)$ sodass $\pi(a_{k+1}) = b_{k+1}$

da alle $P_0, \dots, P_k$ in ihrer Form erhalten bleiben

Dann gilt $\pi(k+1) = k+1$ aber $\pi(f(k+1)) \neq f(k+1)$, was $\pi f \neq f$ impliziert und somit kann E_f kein Träger von f sein. Da aber die Wahl von E_f beliebig war und jede Funktion in $V^{\varrho}_{F_0}$ einen Träger hat (da sie symmetrisch ist), kann keine solche Auswahlfunktion existieren.

$\square$

Um Theorem 8.6 c) und die folgenden Resultate einordnen zu können, kann der in Seminar B5 erarbeitete Implikationsgraph von Nutzen sein:



C_2, ein allgemeineres Auswahlprinzip als $C(\aleph_0, 2)$ scheitert bereits in $V^{\varrho}_{F_0}$:

Sei A die Menge der Urelemente in $V^{\varrho}_{F_0}$ und $[A]^2$ die Familie ihrer 2-elementigen Teilmengen. Da A unendlich ist, ist $[A]^2$ ebenfalls unendlich. Falls C_2 in $V^{\varrho}_{F_0}$ gelten würde, existiert eine Auswahlfunktion $f: [A]^2 \longrightarrow y \ (\subseteq A)$ sodass $f(\{a_i, a_j\}) \in \{a_i, a_j\} \ \forall \{a_i, a_j\} \in [A]^2$.

Da f in $V^{\varrho}_{F_0}$ ist, ist f symmetrisch und es existiert ein endlicher Träger $E_f \in I_{fin}$. $\; E_f = \{a_0, \dots, a_k\}$

Sei nun $\pi \in \mathrm{fix}_g(E_f)$ sodass $\pi(a_{k+1}) = a_{k+3}$ und $\pi(a_{k+2}) = a_{k+4}$.

Dann gilt $\pi(f(\{a_{k+1}, a_{k+2}\})) \notin \{a_{k+1}, a_{k+2}\}$ und somit auch

$$\pi(f(\{a_{k+1}, a_{k+2}\})) \neq f\{a_{k+1}, a_{k+2}\}, \text{ also } \pi f \neq f.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von E_f, es kann also keine Auswahlfunktion auf $[A]^2$ geben. Insbesondere scheitert C_2 in $V^{\varrho}_{F_0}$.

$\square$

In $\vdash^{e}_{F_2}$ scheitert König's Lemma bereits für einen binären Baum:

Jeder unendliche Baum, dessen Knoten endlichen Grad haben besitzt einen unendlichen Zweig. (Pfad, der keinen Knoten zweimal besucht)

Proposition 8.7 In $\vdash^{e}_{F_2}$ existiert ein unendlicher, binärer Baum ohne einen unendlichen Zweig

Beweis: Wir konstruieren den gewünschten Baum $T = (V, E)$ (V Knotenmenge, E Kantenmenge)

Knoten: $\forall n \in \omega$ definiere $V_n := \{ s \in {}^{n}A \mid \forall i \in n : (s(i) \in P_i) \}$

$V := \bigcup_{n \in \omega} V_n$

Kanten: $\langle s, t \rangle \in E$ genau dann, wenn ein $n \in \omega$ existiert, sodass $s \in V_n$, $t \in V_{n+1}$ und $t|_n = s$ (die ersten n Stellen von T sind äquivalent zu s)

T ist offensichtlich ein unendlicher Baum.

Ausserdem hat jeder Knoten $s \in V$ genau 2 Nachfolger, $s^\frown a_n$ und $s^\frown b_n$ ($s_n \in V_n$, $^\frown$ bezeichnet Verbindung der Folge s mit dem Element x).

Somit ist T ein binärer Baum.

Falls in T ein unendlicher Zweig existieren würde, würde dieser mit einer Auswahlfunktion auf $\bigcup_{n \in \omega} P_n$ korrespondieren ($f: \omega \to \bigcup_{n \in \omega} P_n$, $f(n) = s(n)$).

Dies ist ein Widerspruch zu Theorem 8.6 c), also existiert kein solcher Zweig.

$\square$

Als nächstes lasst uns kurz Ramsey's ursprüngliches Theorem in Erinnerung rufen:

Für alle unendlichen Mengen A, $\forall n \in \omega$, $\forall r \in \omega$, für alle Färbungen $\pi : [A]^n \to r$ existiert eine unendliche Teilmenge $H \subseteq A$, sodass $[H]^n$ monochromatisch ist

alle n-elementigen Teilmengen von H haben die gleiche Farbe

Auch diese Aussage gilt in $\mathcal{V}^{o}_{F_2}$ nicht:

Proposition 8.8 In $\mathcal{V}^{o}_{F_2}$ existiert eine unendliche Menge S und eine 2-Färbung von $[S]^2$, sodass keine unendliche Teilmenge homogen ist

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von S

alle 2-elementigen Teilmengen sind gleich gefärbt

Beweis: Sei S die Menge der Urelemente von $\mathcal{V}^{o}_{F_2}$ und färbe die 2-elementigen Teilmengen von S rot, falls $\{a,b\} = P_n$ für irgendein $n \in \omega$, und sonst blau.

Angenommen es existiere eine unendliche Teilmenge $Y \subseteq S$ sodass $[Y]^2$ monochromatisch ist.

Falls $[Y]^2$ rot ist:
Jedes $x \in [Y]^2$ hat die Form $x = P_n$ für irgendein $n \in \omega$. Da Y unendlich ist, existieren insbesondere $P_i, P_j \in [Y]^2$.
Dann ist allerdings auch $\{a_i, a_j\} \in [Y]^2$. Da aber die P_n paarweise disjunkt sind, gilt $\{a_i, a_j\} \neq P_n$ $\forall n \in \omega$, was ein Widerspruch zur Rot-Färbung von $[Y]^2$ ist.

Falls $[Y]^2$ blau ist, enthält Y von jedem Paar P_n ($n \in \omega$) maximal ein Element. Da Y unendlich ist, wird also aus unendlich vielen Paaren genau ein Element ausgewählt. Eine solche Funktion kann aber nicht existieren (da sie einen endlichen Träger E besitzen müsste, dieser fixiert aber nur endlich viele P_n's, womit man $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) \notin \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(f)$ zeigen kann, was ein Widerspruch zur Wahl von E ist).

Das letzte Resultat, welches wir zeigen ist eine Art unendliche Version von Proposition 8.5:

Proposition 8.9 In $V^{0}_{\mathcal{F}_2}$, sei m die Kardinalität der Menge der Urelemente. Dann gilt $V^{0}_{\mathcal{F}_2} \models 2^{m} = 2^{\aleph_0} \cdot fin(m)$

Beweis: Aufgrund des Satzes von Cantor-Bernstein-Schröder ($|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$) reicht es, zwei Injektionen $f: P(A) \to {}^{\omega}2 \times fin(A)$ und $g: {}^{\omega}2 \times fin(A) \to P(A)$ zu finden.

Sei $\forall n \in \omega$ $U_n := \bigcup_{i \in n} P_i$. Weiter sei für alle $S \subseteq A$
$m = \bigcup \{n+1 : |P_n \cap S| = 1\}$.
Dann ist $\underline{F_S = S \cap U_m}$ endlich und für alle $n > m$ gilt entweder $P_n \subseteq S$ (d.h. $|P_n \cap S| = 2$) oder $P_n \cap S = \emptyset$, da sonst $|P_n \cap S| = 1$ und damit $n \in m$ gelten würde, was ein Widerspruch zur Wahl von m wäre.
Definiere $\chi_S : \omega \to 2$, $\underline{\chi_S(n)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } P_{n+m+1} \cap S = \emptyset \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

und definiere nun $\underline{f(S) := \langle \chi_S, F_S \rangle} \in {}^{\omega}2 \times fin(A)$.

Sei nun $\langle \chi, F \rangle \in {}^{\omega}2 \times fin(A)$ und sei wieder $m = \bigcup \{n+1 : |P_n \cap F| = 1\}$
Dann sind $F_0 := F \cap U_m$ und $F_1 := F \setminus F_0$ endlich.
Definiere nun noch $\underline{S_{\chi,F} := F_0 \cup \bigcup\{P_{2n+m} : P_n \subseteq F_1\} \cup \bigcup\{P_{2n+m+1} : \chi(n) = 1\}}$
und $\underline{g(\langle \chi, F \rangle) := S_{\chi,F}} \subseteq A$.

Es ist schnell geprüft, dass f und g Injektionen sind

$\square$