

Algebra I

Serie 1

Zyklische Gruppen, Untergruppen, Ordnung eines Elements

Abgabe bis 7. Oktober

6. (a) Sei G eine Gruppe und sei g ein Element endlicher Ordnung. Zeige, dass für jede ganze Zahl k gilt

$$\text{ord}(g^k) = \frac{\text{kgV}(k, \text{ord}(g))}{k}.$$

- (b) Sei G eine Gruppe und seien $g, h \in G$ zwei kommutierende Elemente endlicher teilerfremder Ordnung. Zeige: $\text{ord}(gh) = \text{ord}(g) \cdot \text{ord}(h)$.
- (c) Zeige, dass die Aussage aus (b) für nicht kommutierende Elemente im Allgemeinen nicht stimmt.

7. Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.

Zeige: Es gilt genau dann $C_m \times C_n \cong C_{n \cdot m}$, wenn $\text{ggT}(m, n) = 1$ ist.

8. Zeige, dass C_4 und $C_2 \times C_2$ bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 4 sind.

9. Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl.

Zeige, dass alle Untergruppen von C_m zyklisch sind und folgere, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{H : H \leq C_m\} & \rightarrow & \{k \in \mathbb{N} : k \mid m\} \\ H & \mapsto & |H| \end{array}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

10. (a) Sei p eine Primzahl.

Zeige: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung p , nämlich C_p .

- (b) Sei G eine Gruppe mit genau einer nichttrivialen echten Untergruppe.

Zeige: Dann gilt $G \cong C_{p^2}$ für eine Primzahl p .

11. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$.

Zeige, $(H_1 \cup H_2) \leq G \iff H_1 \leq H_2 \vee H_2 \leq H_1$.

12. Zeige, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $n\mathbb{Z}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$.