Algebra I

Serie 4

Endlich erzeugte abelsche Gruppen Abgabe bis 28. Oktober

---

25. Seien $m \leqslant n$ positive natürliche Zahlen und sei $G = C_m \times C_n$.

Zeige: Dann existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant m$ und $k|l$, für die $G \cong C_k \times C_l$ ist.

26. Sei $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

Bestimme $[G : nG]$ für alle n mit $2 \leqslant n \leqslant 7$.

27. (a) Sei n eine positive natürliche Zahl. Bestimme $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(b) Finde Homomorphismen $\psi_1, \psi_2, \psi_3\colon \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$, sodass die Gruppen $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/\ker(\psi_i)$ für $i = 1, 2, 3$ paarweise nicht isomorph sind.

28. (a) Zeige, dass $\langle(1,1)\rangle \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht Produktform hat. Das heisst, es existieren keine Untergruppen $H_1, H_2 \leqslant \mathbb{Z}$ mit $\langle(1,1)\rangle = H_1 \times H_2$.

(b) Zeige, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ trivial oder ∞-zyklisch ist. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.

(c) Sei $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Zeige, dass der Index $[G : G^2]$ unendlich ist.

29. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

(a) Beweise folgende Variante von Korollar 4.5, *bzw.* des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen:

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann existieren natürliche Zahlen n, k und paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, sodass für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ eine positive natürliche Zahl j_i und positive natürliche Zahlen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ij_i}$ existieren, sodass gilt

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{\iota=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\iota}}} \right) \times \mathbb{Z}^k .$$

Bemerkung: Der Hauptsatz darf im Beweis verwendet werden.

(b) Zeige: Diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(c) Zeige: Die Zerlegung in Korollar 4.5 ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(d) Bestimme, bis auf Isomorphie, alle abelschen Gruppen der Ordnung 72.

30. Seien G und H additive abelsche Gruppen und seien $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to G$ Homomorphismen mit den folgenden Eigenschaften:

- $(\psi \circ \varphi)[G] = 2G$ (*d.h.* das Bild von G unter $\psi \circ \varphi$ ist $2G = \{x + x : x \in G\}$);
- $(\varphi \circ \psi)[H] = 2H$;
- $\big[H : \varphi[G]\big]$ ist endlich;
- $\big[G : \psi[H]\big]$ ist endlich.

Dann gilt $[G : 2G] \leqslant \big[G : \psi[H]\big] \cdot \big[H : \varphi[G]\big]$, insbesondere ist $[G : 2G]$ endlich.