Algebra I

Serie 6

Permutationsgruppen, Semidirektes Produkt Abgabe bis 11. November

---

37. (a) Zeige: Sind $\rho, \sigma \in S_n$ disjunkte Permutationen, dann gilt $(\rho\sigma)^k = \sigma^k\rho^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: Ist ρ ein k-Zykel in S_n, dann ist $\operatorname{ord}(\rho) = k$.

(c) Zeige: Ist $\pi \in S_n$ ein Produkt paarweise disjunkter Zyklen der Länge $k_1, \ldots, k_r$, so ist $\operatorname{ord}(\pi) = \operatorname{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$.

38. Zeige, dass für jedes $n \geqslant 1$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ isomorph zum semidirekten Produkt $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) \rtimes C_2$ ist.

39. Eine Folge von Gruppen und Homomorphismen der Form

$$\{e\} \to G' \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} G'' \to \{e\}, \qquad (*)$$

heisst **kurze exakte Folge**, falls β injektiv und α surjektiv ist, und $\ker(\alpha) = \operatorname{Im}(\beta)$. Man sagt, dass die kurze exakte Folge $(*)$ **zerfällt**, falls es einen Homomorphismus $\gamma\colon G'' \to G$ gibt so, dass $\alpha \circ \gamma = id_{G''}$ ist.

(a) Seien N, H zwei Gruppen und sei $G = N \rtimes H$ das semidirekte Produkt von N und H. Zeige, dass es eine kurze exakte Folge

$$\{e\} \to N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \to \{e\}$$

gibt, die zerfällt.

(b) Sei

$$\{e\} \to N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \to \{e\}$$

eine kurze exakte Folge, die zerfällt.
Zeige, dass dann $G \cong N \rtimes_\varphi H$.

40. Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei G eine Gruppe mit Ordnung $|G| = 2p$.
Zeige, dass G entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe D_{2p} ist.

41. Seien zwei Gruppen N, H und zwei Homomorphismen $\varphi, \varphi' \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ gegeben. Es seien $N \rtimes_\varphi H$ und $N \rtimes_{\varphi'} H$ die semidirekten Produkte.

Zeige, dass diese beiden Gruppen in den folgenden Situationen isomorph sind:

(a) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi'_h = \alpha \circ \varphi_h \circ \alpha^{-1}$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

(b) Sei $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi = \varphi' \circ \beta$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

42. Bestimme, bis auf Isomorphie, alle Gruppen der Ordnung 28.