Algebra II

Serie 7

Gruppenoperationen und zwei Ringe Abgabe bis 18. November

---

43. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

(a) Zeige, dass die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, $(g, g'H) \mapsto gg'H$ eine Gruppenoperation definiert.

(b) Zeige, dass diese Operation transitiv ist. Das bedeutet, dass die Operation nur eine Bahn besitzt.

(c) Bestimme ihre Stabilisatoren.

(d) Zeige, dass S_7 keine Untergruppe vom Index 6 hat.

44. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$ der reellen Zahlen operiere auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$g \circ (a, b) = \left(ga, \frac{b}{g}\right),$$

wobei $g \in \mathbb{R}^*$ und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

45. Sei $G \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei f eine Auswahlfunktion der Menge der Bahnen M/G, *d.h.* $f\colon M/G \to M$ und für jedes $N \in M/G$ ist $f(N) \in N$.

Zeige, dass gilt

$$|M| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big] .$$

46. Finde eine Menge M und eine Gruppenoperation der Dodekaedergruppe D auf M, sodass die Sylow 2-Untergruppen von D genau die Stabilisatoren sind, *d.h.*

$$\mathrm{Syl}_2(G) = \{\mathrm{St}_G(x) : x \in M\}.$$

47. Sei $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g \circ x$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) \\ (g\,,\, f) & \mapsto & g * f \quad \text{mit } (g * f)(x) := f(g^{-1} \circ x) \end{array}$$

eine Gruppenoperation ist und bestimme ihre Fixpunkte.

48. Sei $(G,+)$ eine additive abelsche Gruppe und sei $\operatorname{End}(G)$ die Menge der Endomorphismen von G.

Zeige, dass $\big(\operatorname{End}(G),+,\ \circ\ \big)$ mit $(f_1+f_2)(g) := f_1(g)+f_2(g)$ und $(f_1 \circ f_2)(g) := f_1\big(f_2(g)\big)$ zu einem Ring wird.

49. Sei S eine nicht leere Menge. Auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(S)$ (d.h. der Menge aller Teilmengen von S) definieren wir zwei binäre Operationen $\oplus$ und $*$ wie folgt:

$$X * Y := X \cap Y$$

und

$$X \oplus Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\,.$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), \emptyset, S, \oplus,\ *\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Zeige, dass eine nicht leere Menge $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(S)$ genau dann ein Ideal ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für $X, Y \in \mathfrak{a}$ ist $X \cup Y \in \mathfrak{a}$,

(ii) ist $X \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathscr{P}(X) \subseteq \mathfrak{a}$.