Algebra I

Serie 9

Isomorphiesätze, Primideale, Quotientenkörper Abgabe bis 2. Dezember

---

57. (a) Zeige: Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subseteq S$ ein Ideal, dann ist $\varphi^{-1}[\mathfrak{a}]$ ein Ideal in R.

(b) Zeige: Ist $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, dann ist $\varphi[\mathfrak{a}]$ ein Ideal in S.

58. (a) Zeige: Jedes maximale Ideal ist Primideal.

(b) Zeige: Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.

(c) Zeige: Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und ist $R/\mathfrak{p}$ endlich, dann ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal.

59. Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Monoid, *d.h.* es ist $1 \in S$ und mit $x, y \in S$ ist auch $x \cdot y \in S$. Ferner sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, das bezüglich dieser Eigenschaft maximal ist.

Zeige: $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal.

60. Seien R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \subseteq R$ Primideale in R mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$.

Zeige: Dann existiert ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$.

61. Gegeben sei der Ring $R = \big(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \emptyset, \mathbb{N}, +, \cdot\big)$ mit $+$ und $\cdot$ wie in Aufgabe 48 und sei

$$\mathfrak{a} = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ ist endlich}\} \subseteq R\,.$$

Weiter sei

$$S = \Big\{ \bigcup_{n \in Y} \{2n, 2n+1\} : Y \subseteq \mathbb{N} \Big\}$$

ein Unterring von R.

(a) Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R ist.

(b) Zeige, dass $\mathfrak{a}$ kein Primideal ist.

(c) Finde mit dem 1. Isomorphiesatz einen von $(S+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ verschiedenen, aber zu $(S+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ isomorphen, Ring und bestimme den entsprechenden Isomorphismus.

(d) Finde einen surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ mit $\ker(\varphi) = \mathscr{P}(4\mathbb{N})$.

(e) Sei φ der surjektive Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ aus Aufgabe (d) und sei $\mathfrak{b} := \mathscr{P}(2\mathbb{N})$.

Bestimme den Isomorphismus zwischen $R/\mathfrak{b}$ und $S/\varphi[\mathfrak{b}]$.

(f) Finde zwei Primideale in R.

(g) Wo liegt die Schwierigkeit, das Ideal $\mathfrak{a}$ zu einem Primideal zu erweitern?

62. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$.

Bestimme den Quotientenkörper $\mathrm{Quot}\big(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]\big)$ des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, wobei

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \big\{a + \sqrt{d} \cdot b : a, b \in \mathbb{Z}\big\} .$$