Algebra I

Serie 10

maximale Ideale, Polynomringe, endliche Körper Abgabe bis 9. Dezember

---

Das sogenannte Teichmüllerprinzip ist eine Aussage, welche äquivalent zum Auswahlaxiom ist, und welche sich besonders für Anwendungen in der Algebra eignet. Für die Formulierung des Teichmüllerprinzips müssen wir folgenden Begriff einführen:

Eine Menge M hat **endlichen Charakter**, wenn gilt:

$$X \text{ ist in } M \iff \text{jede endliche Teilmenge von } X \text{ ist in } M.$$

TEICHMÜLLERPRINZIP: Ist M eine Menge mit endlichem Charakter, so hat M bezüglich der Inklusion $\subseteq$ ein maximales Element.

63. Sei R ein Ring.

(a) Zeige, dass die Menge $M := \{S \subseteq R : 1_R \notin (S)\}$ endlichen Charakter hat.

(b) Zeige, dass R ein maximales Ideal besitzt.

(c) Zeige, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ mit $\mathfrak{a} \neq R$ zu einem maximalen Ideal erweitert werden kann.

64. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $R[X][Y]$ der Polynomring über $R[X]$ in der Unbestimmten Y und sei $R[Y][X]$ der Polynomring über $R[Y]$ in der Unbestimmten X.

(a) Zeige: $R[X][Y] \simeq R[Y][X]$.
Bemerkung: Für $R[X][Y]$ schreiben wir auch $R[X, Y]$. Mehr dazu in der nächsten Aufgabe.

(b) Zeige, dass das Ideal (X, Y) kein Hauptideal ist.

Sei Λ eine Indexmenge und sei $\mathscr{X} := \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Menge von Symbolen. Sei R ein kommutativer Ring. Ziel der nächsten Aufgabe ist es, den Polynomring $R[\mathscr{X}]$ zu definieren.

Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge I mit einer binären Relation, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- Reflexivität: $\forall i \in I\colon i \preceq i$
- Transitivität: $\forall i, j, k \in I\colon (i \preceq j) \wedge (j \preceq k) \Rightarrow (i \preceq k)$
- Existenz einer oberen Schranke: $\forall i, j \in I\, \exists k \in I\colon i, j \preceq k$.

Ein *induktives System von Ringen* besteht aus einer gerichteten Menge $(I, \preceq)$, einer Menge von Ringen $\{R_i : i \in I\}$ und für alle $i, j \in I$ mit $i \preceq j$ einem Ringhomomorphismus $f_{ij}\colon R_i \to R_j$, der die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\forall i \in I\colon f_{ii} = id_{R_i}$
- $\forall i, j, k \in I,\ i \preceq j \preceq k\colon f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

Der *Kolimes* des induktiven Systems ist dann wie folgt definiert. Auf der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup}_{i\in I} R_i$ definieren wir eine Äquivalenzrelation. Seien $x \in R_i$ und $y \in R_j$. Dann gilt

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in I\colon (i, j \preceq k) \wedge (f_{ik}(x) = f_{jk}(y)).$$

Die unterliegende Menge des Rings $\operatorname{colim}_{i\in I} R_i$ ist nun definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation.

65. (a) Definiere Addition und Multiplikation auf $\operatorname{colim}_{i\in I} R_i$. Zeige, dass diese Operationen wohldefiniert sind und $\operatorname{colim}_{i\in I} R_i$ zu einem Ring machen.

(b) Sei $\operatorname{fin}(\mathscr{X})$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathscr{X}$. Für $S \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$ sei $\operatorname{Numm}(S)$ die Menge aller Bijektionen $\{1, \ldots, |S|\} \to S$.
Sei

$$I := \bigcup_{S\in\operatorname{fin}(\mathscr{X})} \{S\} \times \operatorname{Numm}(S)\,.$$

Die Elemente von I sind geordnete Paare $\langle S, f\rangle$ mit $S \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$ und $f \in \operatorname{Numm}(S)$.
Zeige, dass I mit der Relation

$$\langle S, f\rangle \preceq \langle S', f'\rangle \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq S'$$

eine gerichtete Menge ist.

(c) Definiere ein gerichtetes System mit dieser gerichteten Menge mit

$$R_{S,f} := R[f(1)][f(2)]...[f(|S|)].$$

Dessen Kolimes ist der Polynomring $R[\mathscr{X}]$.

(d) Verallgemeinere die universelle Eigenschaft von $R[X]$ auf $R[\mathscr{X}]$.

66. (a) Konstruiere einen Körper mit 5^2 Elementen.
Hinweis: Suche im Ring $\mathbb{F}_5[X]$ ein Polynom p vom Grad 2, sodass (p) ein Primideal ist, und betrachte $\mathbb{F}_5[X]/(p)$.

(b) Konstruiere einen Körper mit 2^5 Elementen.

67. Bestimme die Einheitengruppe des Rings $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.