Algebra I

Serie 11

Euklidische und faktorielle Ringe Abgabe bis 16. Dezember

Ein Integritätsring R heiss **euklidisch**, wenn eine Abbildung $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ existiert mit folgender Eigenschaft:

Für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren $q, r \in R$, sodass $a = b \cdot q + r$ mit $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(b)$.

68. (a) Zeige: Jeder euklidische Ring ist Hauptidealring.

(b) Zeige: $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sind euklidisch.

69. (a) Verallgemeinere den euklidischen Algorithmus zur Berechnung des ggT zweier Zahlen aus $\mathbb{N}$ auf euklidische Ringe.

(b) Berechne einen ggT von $X^3 + X^2 + X - 3$ und $X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Stelle den ggT aus (b) als Linearkombination (mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[X]$) der beiden Polynome $X^3 + X^2 + X - 3$ und $X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4$ dar.

(d) Finde mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT der Polynome

$$-3XY + 3X^2Y + Y^2 - 4XY^2 + Y^3 \quad \text{und} \quad -2X + 2X^2 - Y - XY - Y^2$$

in $\mathbb{Z}[X, Y]$.

70. Zeige: $X^3 - X$ hat 6 Nullstellen in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

71. Zeige: In einem faktoriellen Ring ist jedes irreduzible Element ein Primelement.

72. Sei K ein Körper. Finde alle maximalen Ideale in $K[X]$.

73. Im Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

Zeige:

(a) Die Funktion $N\colon R \to \mathbb{N}, z = a + bi\sqrt{5} \mapsto |z|^2 = a^2 + 5b^2$ ist multiplikativ (das heisst, $\forall \alpha, \beta \in R : N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$).

(b) $R^* = \{u \in R \mid N(u) = 1\} = \{\pm 1\}$.

(c) Die Elemente $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind unzerlegbar in R.

(d) Die Elemente $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind keine Primelemente in R.

(e) Für das Ideal $I = (2, 1 + i\sqrt{5})$ gilt $I \cdot I = (2)$.

(f) I ist kein Hauptideal von R.

(g) I ist ein maximales Ideal von R.

(h) Kein anderes Primideal enthält die Zahl 2.

(i) R ist nicht faktoriell.

74. (a) Die komplexe Zahl $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$.
Finde ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathbb{Q}[\omega] \simeq \mathbb{Q}[X]/\mathfrak{a}$.

(b) Die reelle Zahl $t = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$.
Finde ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathbb{Q}[t] \simeq \mathbb{Q}[X]/\mathfrak{a}$.

75. Sei $\mathfrak{a} = (3, X^3 - X^2 + 2X - 1) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ ein Ideal in $\mathbb{Z}[X]$.

(a) Ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal?

(b) Ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal?