Algebra II

Serie 13

Körpererweiterungsgrade, Minimalpolynome Abgabe 6. März

---

81. (a) Sei $L : K$ eine Körpererweiterung.
Zeige: Sie ist genau dann endlich, wenn sie algebraisch und von endlich vielen Elementen erzeugt ist.

(b) Seien $M : L$ und $L : K$ Körpererweiterungen.
Zeige: $M : K$ ist genau dann algebraisch, wenn $M : L$ und $L : K$ algebraisch sind.

82. Sei $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung. Seien K_1, K_2 zwei Zwischenkörper, sodass die Körpererweiterungen $K_1 : K$ und $K_2 : K$ endlich sind. Das *Kompositum* von K_1 und K_2 ist definiert als $K_1K_2 := K(K_1 \cup K_2)$. Zeige:

(a) $[K_1K_2 : K_2] \leq [K_1 : K]$

(b) $[K_1K_2 : K] \leq [K_1 : K] \cdot [K_2 : K]$

(c) Falls $\operatorname{ggT}([K_1 : K], [K_2 : K]) = 1$ ist, so gilt Gleichheit in (b).

Bemerkung: Falls in (b) Gleichheit gilt, so heissen K_1 und K_2 *linear disjunkt* über K.

83. (a) Sei ω eine primitive 3. Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$.
Zeige: $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$.

(b) Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$.

(c) Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

84. Bestimme das Minimalpolynom folgender komplexer Zahlen über $\mathbb{Q}$.

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

(b) $\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}$

(c) $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}i$

85. (a) Zeige, dass die Menge

$$\{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$$

abzählbar ist.

(b) Zeige: $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ ist überabzählbar.