Algebra II

Serie 14

Zerfällungskörper, endliche Körper Abgabe 13. März

---

86. (a) Beweise, dass $(X^2-2X-2)(X^2+1)$ und $X^5-3X^3+X^2-3$ dieselben Zerfällungskörper K über $\mathbb{Q}$ haben, und finde $[K:\mathbb{Q}]$.

(b) Bestimme den Grad eines Zerfällungskörpers des Polynoms X^3+X^2+1 über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{F}_2$.

87. Konstruiere jeweils einen Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ für die Polynome $p = X^5-1$ und $q = X^4-5$ sowie dem Produkt $p\cdot q$. Seien diese Körper K, L und M. Beweise:

$$[M:\mathbb{Q}] < [K:\mathbb{Q}]\cdot[L:\mathbb{Q}].$$

Hinweis: Beweise mit Hilfe des Schönemann-Eisenstein Kriteriums die Irreduzibilität des Polynoms $X^4+X^3+X^2+X+1$ über $\mathbb{Q}$.

88. Sei K ein Körper und sei $f\in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n\geq 1$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Beweise:

(a) Es gilt $[L:K]|n!$.

(b) Im Fall $[L:K]=n!$ ist f irreduzibel über K.

89. (a) Zeige: Das Polynom $h\in K[X]$ ist separabel, wenn h und $D\,h$ keinen gemeinsamen Faktor $\bar{h}\in K[X]$ mit $\mathrm{grad}(\bar{h})\geq 1$ besitzen.

(b) Zeige: Ist $h\in K[X]$ ein Polynom und besitzen h und $D\,h$ einen gemeinsamen Faktor $\bar{h}\in K[X]$ mit $\mathrm{grad}(\bar{h})\geq 1$, so ist h nicht notwendigerweise inseparabel.

(c) Zeige: Ist p eine Primzahl, so ist das Polynom $X^{p^n-1}-1\in\mathbb{F}_p[X]$ separabel.