Algebra II

Serie 16

Einheitswurzeln, algebraischer Abschluss Abgabe 27. März

---

95. Sei K ein Körper der Charakteristik 0 oder $p > 0$. Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls $\operatorname{char}(K) = p$ nehmen wir an, dass $p \nmid n$ gilt. Eine *n-te Einheitswurzel* ist eine Nullstelle von $X^n - 1$ in $\overline{K}$.

(a) Zeige: Es gibt genau n paarweise verschiedene n-te Einheitswurzeln.

(b) Zeige: Die n-ten Einheitswurzeln bilden eine zyklische Untergruppe von $(\overline{K}^*, \cdot)$.
Bemerkung: Die Erzeuger dieser Gruppe heissen *primitive n-te Einheitswurzeln.*

(c) Sei $\varphi(n) := |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n,\ \operatorname{ggT}(m,n) = 1\}|$ die *Eulersche φ-Funktion.*
Zeige: Die Anzahl der primitiven n-ten Einheitswurzeln ist $\varphi(n)$.

96. Sei K ein Körper. Zeige: Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent.

i. Der Körper K ist algebraisch abgeschlossen.

ii. Es existiert ein Unterkörper $K_0 \subset K$, sodass die Erweiterung $K : K_0$ algebraisch ist und jedes Polynom in $K_0[X]$ über K zerfällt.

97. Sei $L : K$ eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst *der (relative) algebraische Abschluss von K in L.* Zeige:

(a) $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von $L : K$, der algebraisch über K ist.

(b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K im Sinne der Vorlesung.

(c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$?

(d) Seien $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}} : \overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

98. Zeige, dass endliche Körper nicht algebraisch abgeschlossen sind.

99. Sei $\overline{\mathbb{F}_p}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.
Wie viele Unterkörper der Kardinalität p^n enthält $\overline{\mathbb{F}_p}$?