

Algebra II

Serie 17

Separable und normale Körpererweiterungen

Abgabe 3. April

- 100.** Finde ein Beispiel einer algebraischen Körpererweiterung $L : K$ mit den folgenden Eigenschaften.
- (a) $L : K$ ist endlich, nicht separabel und K hat positive Charakteristik.
 - (b) $L : K$ ist nicht endlich, aber normal.
 - (c) $L : K$ ist nicht endlich und nicht normal.
- 101.** (a) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung.
Zeige: Ist $[L : K]$ teilerfremd zu p , so ist $L : K$ separabel.
- (b) Wann ist eine Körpererweiterung vom Grad 2 inseparabel?
- 102.** Zeige: Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.
- 103.** Sei $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung. Sei \bar{L} ein algebraischer Abschluss von L .
Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
- i. $L : K$ ist normal.
 - ii. Für jeden Körperhomomorphismus $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$ mit $\varphi|_K = id$ gilt $\varphi(L) \subseteq L$.
 - iii. Für jeden Körperhomomorphismus $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$ mit $\varphi|_K = id$ gilt $\varphi(L) = L$.
- 104.** Ist für folgendes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ normal? Falls nicht, bestimme eine *normale Hülle* der Erweiterung, d.h. einen kleinsten Oberkörper $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)}$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$, sodass $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)} : \mathbb{Q}$ normal ist.
- (a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 - (b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$