Algebra II

Serie 18

Galoisgruppen

Abgabe 10. April

105. Sei $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung und sei $A \subset L$ mit $L = K(A)$. Formalisiere und beweise folgende Aussage: Jedes Element der Galoisgruppe von $L : K$ ist durch die Bilder von A vollständig bestimmt.

106. Berechne die Galoisgruppen folgender Körpererweiterungen.

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}$

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}$

107. Für welche Werte von k ist die Körpererweiterung $\mathbb{F}_7(X)/\mathbb{F}_7(X^k)$

(a) separabel?

(b) normal?

(c) beides, d.h. galoissch?

Hinweis: Folgende Aussage darf ohne Beweis verwendet werden: Eine einfache Körpererweiterung $L : K$ ist genau dann separabel, falls sie von einem Element in L, das separabel über K ist, erzeugt wird.

108. Ist L der Zerfällungskörper von $g \in K[X]$, so heisst $\mathrm{Gal}(L : K)$ die *Galoisgruppe von g*, bezeichnet mit $\mathrm{Gal}(g)$.

Zeige: Ist $g \in K[X]$ mit $\mathrm{grad}(g) = n$, so ist $\mathrm{Gal}(g)$ isomorph zu einer Untergruppe von S_n. Insbesondere gilt $|\,\mathrm{Gal}(g)| \mid n!$.

109. Sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

Berechne $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.