Algebra II

Serie 19

Galoisgruppen und Repetitionsaufgaben Abgabe 24. April

---

110. Sei α algebraisch über K und sei $\varphi\colon K \to L'$ ein Körperhomomorphismus. Dann gibt es höchstens $[K(\alpha) : K]$ verschiedene Körperhomomorphismen $\tilde{\varphi} : K(\alpha) \to L'$ mit $\tilde{\varphi}|_K = \varphi$.

111. Sei p prim und $m, n \geq 1$ mit $m \mid n$.

(a) Zeige, dass der m-fache Frobeniushomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & \mathbb{F}_{p^n} & \longrightarrow & \mathbb{F}_{p^n} \\ & a & \longmapsto & a^{p^m} \end{array}$$

ein $\mathbb{F}_{p^m}$-Automorphismus von $\mathbb{F}_{p^n}$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_{p^m})$ von σ erzeugt wird und somit zyklisch ist.

(c) Bestimme die Zwischenkörper $\mathbb{F}$ der Körpererweiterung $\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_{p^m}$ sowie die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F})$ und $\mathrm{Gal}(\mathbb{F} : \mathbb{F}_{p^m})$.

112. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstelle von f in einem algebraischen Abschluss von K. In Aufgabe 108 haben wir gesehen, dass $\mathrm{Gal}(f)$ in die symmetrische Gruppe $S(a_1, \ldots, a_n)$ eingebettet werden kann. Das bedeutet, dass $\mathrm{Gal}(f)$ auf den Nullstellen von f operiert.

Zeige: Für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist die Bahn von a_i dieser Operation genau die Menge der Nullstellen des irreduziblen Faktors von f, dessen Nullstelle a_i ist.

113. Sei L der Zerfällungskörper von $X^4 - 4$ über $\mathbb{Q}$.

Bestimme alle Zwischenkörper K mit $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq L$.

114. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel und sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeige: Ist $\mathrm{Gal}(L : K)$ abelsch, so ist $L = K(a)$ für eine beliebige Nullstelle $a \in L$ von f.

115. Sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung und $f \in K[X]$ irreduzibel.

(a) Zeige: Falls $\deg(f)$ und $[L : K]$ teilerfremd sind, ist f irreduzibel über L.

(b) Gib Beispiele von irreduziblen Polynomen in $K[X]$ an, deren Grad nicht teilerfremd zu $[L : K]$ ist und die über L reduzibel sind.

116. Finde für folgende Werte von x ein annullierendes Polynom von x über $\mathbb{Q}$ und folgere daraus eine einfachere Darstellung von x.

(a) $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

(b) $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

117. Sind die folgenden Körper isomorph?

(a) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2+2)$;

(b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2+2)$;

(c) $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2+2)$;

(d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^3+2)$.

118. (a) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über dem Körper K.
Zeige, dass dann gilt

$$\big[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K\big] \leq \prod_{i=1}^{n} \big[K(\alpha_i) : K\big]\,.$$

(b) Zeige am Beispiel $\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}\big) : \mathbb{Q}$, dass die Ungleichung in (a) auch strikt sein kann.

(c) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}\big) : \mathbb{Q}$ normal?

119. Finde alle Körperhomomorphismen $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, e^{\frac{\pi i}{4}}) \to \mathbb{C}$.
Ist die Körpererweiterung $K : \mathbb{Q}$ normal?