Algebra II

Serie 20

Hauptsatz der Galoistheorie, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal Abgabe 8. Mai

---

120. Führe das Beispiel der Galoisgruppe von $X^6 - 2X^3 - 1$ über $\mathbb{Q}$ aus der Vorlesung zu Ende.

121. Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^6 - 5$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme alle Zwischenkörper von $L : \mathbb{Q}$ mitsamt Inklusionen sowie, falls sie galoissch über $\mathbb{Q}$ sind, deren Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$.

122. Sei $L : K$ eine endliche Galoiserweiterung und seien E, E' zwei Zwischenkörper. Zeige, dass E und E' genau dann isomorph über K sind, wenn $\mathrm{Gal}(L : E)$ und $\mathrm{Gal}(L : E')$ in $\mathrm{Gal}(L : K)$ konjugiert sind.

123. Zeige oder widerlege: Es existiert eine Körpererweiterung mit genau $50'000$ echten Zwischenkörpern.

124. In dieser Aufgabe beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe der Galoistheorie. Sei $K : \mathbb{R}$ eine endliche Körpererweiterung.

(a) Nimm an, $K : \mathbb{R}$ sei galoissch. Zeige, dass ein Körperturm $K = K_n : \ldots : K_0 : \mathbb{R}$ existiert, sodass $[K_0 : \mathbb{R}]$ ungerade ist und für jedes $0 \leq i \leq n-1$ die Erweiterung $K_{i+1} : K_i$ den Grad 2 hat.

(b) Zeige, dass $\mathbb{R}$ keine nichttriviale Erweiterung von ungeradem Grad hat.

(c) Zeige, dass jede Erweiterung von $\mathbb{R}$ vom Grad 2 isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

(d) Zeige, dass $\mathbb{C}$ keine Erweiterung vom Grad 2 hat.

(e) Folgere, dass K entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

125. Diese Aufgabe ist eher informell, die auftretenden Begriffe werden später in der Vorlesung formal definiert werden. Wir identifizieren die Ebene mit $\mathbb{C}$ und nehmen die Punkte 0 und 1 als gegeben (*d.h.* bereits konstruiert) an.

Zeige: Die Menge aller Zahlen (*bzw.* Punkte), die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, bilden einen Unterkörper von $\mathbb{C}$, der abgeschlossen ist unter komplexer Konjugation und Quadratwurzelbildung.

Erinnerung: Mit Zirkel und Lineal sind folgende Punkte, Geraden und Kreise konstruierbar.

- Sind A und B zwei verschiedene konstruierbare Punkte, so ist auch die Gerade durch A und B konstruierbar.
- Sind M, A und B konstruierbare Punkte mit $A \neq B$, so ist auch der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{AB}$ konstruierbar.

- Sind g_1 und g_2 zwei verschiedene konstruierbare Geraden, so ist auch der Schnittpunkt von g_1 und g_2 konstruierbar (falls er existiert).
- Ist g eine konstruierbare Geraden und k ein konstruierbarer Kreis, so sind auch die Schnittpunkte von g mit k konstruierbar (falls solche existieren).
- Sind k_1 und k_2 konstruierbare Kreise, so sind auch die Schnittpunkte von k_1 und k_2 konstruierbar (falls solche existieren).