

Algebra II

Serie 23

Radikalerweiterungen

Abgabe 29. Mai

137. Finde eine Radikalerweiterung von \mathbb{Q} , welche die folgende komplexe Zahl enthält.

(a) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt[3]{23}}{\sqrt[4]{5}}$

(b) $(\sqrt{6} + 2\sqrt[3]{5})^4$

(c) $\frac{2\sqrt[5]{5}-4}{\sqrt{1+\sqrt{99}}}$

138. (a) Sei $K : \mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung, sodass $[K : \mathbb{Q}]$ eine ungerade Primzahl ist.

Zeige: Wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dann ist $K : \mathbb{Q}$ keine Radikalerweiterung.

(b) Finde ein Beispiel von Körpererweiterungen $M : L : K$, sodass $M : K$ eine Radikalerweiterung ist, $L : K$ aber nicht.

139. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom.

Zeige: Ist eine Nullstelle von f durch Radikale ausdrückbar, so gilt das für alle Nullstellen.

140. Sei $L : K$ eine Radikalerweiterung in \mathbb{C} und sei \tilde{L} die normale Hülle von $L : K$.

Zeige: $\tilde{L} : K$ ist eine Radikalerweiterung.

141. Sei $L : K$ eine Radikalerweiterung.

Zeige: Es existieren $\beta_1, \dots, \beta_k \in L$ und Primzahlen p_1, \dots, p_k mit $\beta_j^{p_j} \in K(\beta_1, \dots, \beta_{j-1})$ für alle $1 \leq j \leq k$.