PD Dr. L. Halbeisen D-MATH Herbstsemester 2016

Algebra I

Lösungsskizzen der Zwischenprüfung 20. Februar 2017

1. Das folgende Objekt ist eine Gruppe.

   (a) $(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \times)$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt bezeichnet.

   (b) $(G, \circ)$ mit $a \circ b = b \cdot a$, wobei $(G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe ist.

   (c) $(\mathbb{R}^*, \circ)$ mit $a \circ b = a^2 b^2$

   (d) $\{\pi \in S_{10} : \forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \pi(i) \equiv i \mod (3)\}$ mit der üblichen Gruppenoperation von S_n.

   Lösung: (a) Falsch, nicht assoziativ.

   (b) Wahr

   (c) Falsch, kein neutrales Element

   (d) Wahr

2. Die folgende Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus.

   (a) $S_n \to S_{n-1},\ \pi \mapsto \pi|_{\{1,\ldots,n-1\}}$ für $n \geq 2$

   (b) $GL(n, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, +),\ A \mapsto \log_2(\frac{1}{\det(A)})$

   (c) $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^3, +),\ a \mapsto (a, 5a, -a)$

   (d) für ein beliebiges $\tau \in S_n$, $f_\tau : S_n \to S_n,\ f(\pi)(i) = \pi(\tau(i))$

   Lösung: (a) Falsch, nicht wohldefiniert

   (b) Wahr

   (c) Wahr

   (d) Falsch, bildet e nicht auf e ab

3. Die folgende Aussage ist wahr.

   (a) In jeder Gruppe gilt $\operatorname{ord}(ab) \leq \operatorname{ord}(a) \operatorname{ord}(b)$.

(b) Es existiert ein Element der Ordnung 7 in S_6.

(c) Es existiert ein Element der Ordnung 6 in S_5.

(d) Es existiert ein Element der Ordnung 8 in S_7.

Lösung: (a) Falsch, z.B. $a = s$ und $b = sr$ in D_n mit $n > 4$

(b) Falsch, denn $7 \nmid |S_6|$

(c) Wahr, z.B. $(1\,2)(3\,4\,5)$

(d) Falsch, denn sein ein Element aus S_7 als Produkt disjunkter Zykeln geschrieben, dann ist die Ordnung des Elements das kgV der Längen des Zykels.

4. Wie viele Untergruppen hat die folgende Gruppe?

(a) S_4 hat genau 18 Untergruppen.

(b) C_{24} hat genau 8 Untergruppen.

(c) D_4 hat genau 10 Untergruppen.

(d) $C_3 \times C_3$ hat genau 4 Untergruppen.

Lösung: (a) Falsch, durch Aufzählen findet man viel mehr

(b) Wahr, denn 24 hat genau 8 Teiler

(c) Wahr, siehe Aufgabe 17

(d) Falsch, viele übersehen die Untergruppe $\{(g, g) : g \in C_4\}$

5. Gibt es Inklusionen von Gruppen wie folgt?

(a) $D_6 < A_6$

(b) $\mathbb{Q}^2 < \mathbb{R}$

(c) $D_5 < A_5$

(d) $C_2 \times C_2 < S_5$

Lösung: (a) Falsch, denn ein Element von S_6 der Ordnung 6 ist entweder ein 6-Zykel oder ein Produkt eines 2-Zykels und eines davon disjunkten 3-Zykels, in beiden Fällen hat das Element Signum -1

(b) Richtig, z.B. $\langle 1, \pi \rangle$

(c) Richtig, die übliche Inklusion

(d) Richtig, z.B. $\langle (1\,2), (3\,4) \rangle$

6. Stimmen die folgenden Aussagen für beliebige einfache Gruppen G?

(a) Jeder Homomorphismus mit Definitionsbereich G ist trivial oder injektiv.

(b) Das Zentrum von G ist trivial.

(c) Jeder Homomorphismus mit Bildbereich G ist trivial oder injektiv.

(d) Jede Operation von G auf einer Menge hat einen Fixpunkt.

(e) Ist G unendlich, so hat G keine echte Untergruppe von endlichem Index.

Lösung: (a) Ja, denn der Kern ist ein Normalteiler

(b) Nein, z.B. $G = C_5$

(c) Nein, z.B. $G \times G \to G$ die Projektion auf einen Faktoren

(d) Nein, z.B. die Operation auf G selbst durch Linksmultiplikation

(e) Ja, denn sei $H < G$ von endlichem Index, dann gibt es nur endlich viele Konjugierte gHg^{-1}, deren Schnitt ist nichttrivial und normal in G

7. Wie gross ist der folgende Index?

(a) $[\mathbb{R}^* : (\mathbb{R}^*)^2] = 2$

(b) $[\mathbb{Z}^2 : 2\mathbb{Z}^2] = 2$

(c) $[\mathbb{C}^* : (\mathbb{C}^*)^2] = 1$

(d) $[C_5 : C_5^2] = 2$

Lösung: (a) Richtig, denn $(\mathbb{R}^*)^2 = \mathbb{R}_+$

(b) Falsch, Räpresentanten verschiedener Nebenklassen sind $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

(c) Richtig, denn in $\mathbb{C}$ existieren alle Wurzeln

(d) Falsch, denn jedes Element in C_5 ist ein Quadrat

8. Wie viele Gruppen von bestimmter Ordnung gibt es bis auf Isomorphie?

(a) genau 4 abelsche der Ordnung 21

(b) genau 4 der Ordnung 22

(c) genau 4 der Ordnung 63

(d) genau 4 abelsche der Ordnung 36

Lösung: (a) Falsch, es gibt genau eine abelsche, Hauptsatz endl. erz. ab. Gruppen

(b) Falsch, es gibt nur C_{22} und D_{11}, denn 22 hat die Form $2\times$Primzahl

(c) Falsch, mit Sylowsätzen und semidirekten Produkten findet man mehr

(d) Wahr, Hauptsatz endl. erz. ab. Gruppen

9. Welche Aussagen über das Zentrum einer Gruppe G stimmen?

   (a) Wenn $G/Z(G)$ abelsch ist, so ist G abelsch.

   (b) Jeder Gruppenautomorphismus von G bildet das Zentrum auf sich ab.

   (c) Ein beliebiger Gruppenhomomorphismus bildet das Zentrum in das Zentrum ab.

   (d) G operiert auf $Z(G)$ trivial durch Konjugation.

   Lösung: (a) Falsch, z.B. $G = Q$ die Quaternionengruppe mit 8 Elementen

   (b) Wahr

   (c) Falsch, z.B. $C_n \to D_n$

   (d) Wahr

10. Lässt sich die folgende Gruppe nichttrivial als direktes oder semidirektes Produkt schreiben? Ein semidirektes Produkt ist trivial, wenn es ein direktes Produkt ist. Ein direktes Produkt ist trivial, wenn einer der Faktoren die triviale Gruppe ist.

    (a) $\mathbb{Q}$ als semidirektes

    (b) D_{10} als direktes

    (c) S_8 als direktes

    (d) D_{10} als semidirektes

    (e) S_8 als semidirektes

    Lösung: (a) Nein, denn nichttriviale semidirekte Produkte sind nie abelsch

    (b) Ja, von $\langle r^2, s\rangle$ und $\langle r^5\rangle$

    (c) Nein, denn A_8 ist einfach und der einzige nichttriviale Normalteiler

    (d) Ja, von C_2 und C_{10}

    (e) Ja, von A_8 und C_2

11. Auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen definieren wir eine Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ wie folgt:

    $$\begin{aligned} X + Y &:= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \\ X \cdot Y &:= X \cap Y \end{aligned}$$

    Dann ist $\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \emptyset, \mathbb{N}, +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring.

    (a) Jedes Primideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ist ein maximales Ideal.

    (b) Jedes Hauptideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ist ein Primideal.

Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein maximales Ideal und damit $\mathbb{F} := \mathscr{P}(\mathbb{N})/\mathfrak{a}$ ein Körper.

(c) $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$

(d) $\mathbb{F}$ enthält nur zwei Elemente.

(e) $\mathbb{F}$ ist endlich.

Lösung: (a) Ja, wegen der Lösung zu (d)

(b) Nein, z.B. $\mathscr{P}(\{0\})$ ist das von $\{0\}$ erzeugte Ideal, das das Produkt $\{0, 1\} \cdot \{0, 2\}$ enthält, aber keines der Faktoren.

(c) Ja, denn für jedes $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ gilt bereits $A + A = \emptyset$

(d) Ja, denn für jedes $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ gilt $A \cdot A = A$, also gilt dasselbe auch in jedem Faktorring von $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Insbesondere hat so ein Faktorring, sobald er nullteilerfrei ist, nur zwei Elemente.

(e) Ja, siehe (d)

12. Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Ideale in $\mathbb{F}_2[X]$ sind maximal?

    (a) $(X^3 + X^2 + X + 1)$

    (b) $(X + 1)$

    (c) $(X^3 + X^2 + X + 1, X^2 + X)$

    (d) $(X^2 + 1)$

    (e) $(X^3 + X + 1)$

    Lösung: (a) Nein, denn das erzeugende Polynom hat die Nullstelle 1, ist also nicht irreduzibel

    (b) Ja, denn das erzeugende Polynom hat Grad 1, ist also irreduzibel

    (c) Ja, denn das Ideal ist vom ggT erzeugt, und der ggT ist $X + 1$, also irreduzibel

    (d) Nein, denn das erzeugende Polynom hat die Nullstelle 1, ist also nicht irreduzibel

    (e) Ja, denn das erzeugende Polynom hat Grad 3 und keine Nullstelle, ist also irreduzibel

13. Betrachte den Ring $R := \mathbb{Z}\left[\frac{i}{\sqrt{3}}\right]$. Welche der foldenden Mengen sind Unterringe von R?

    (a) $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right]$

    (b) $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{3}\right]$

    (c) $3\mathbb{Z}$

    (d) $\{a \cdot i\sqrt{3} : a \in \mathbb{Z}\}$

    (e) $\mathbb{Z}[i]$

Lösung: (a) Ja, denn $\frac{1}{3} = -(\frac{i}{\sqrt{3}})^2$

(b) Ja, denn $i\sqrt{3} = 3 \cdot \frac{i}{\sqrt{3}}$

(c) Nein, diese Menge hat kein Einselement und ist somit kein Ring

(d) Nein, diese Menge hat kein Einselement und ist somit kein Ring

(e) Nein, denn $i \notin \mathbb{Z}\big[\frac{i}{\sqrt{3}}\big] = \{a + b\frac{i}{\sqrt{3}} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

14. Die folgende Aussage ist wahr.

   (a) $\mathbb{Q}[i] \cong \mathbb{Q}[X]/(1 - X^2)$
   (b) $\mathbb{Q}[i\sqrt{3}] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^3 + X^2 + 3X + 3)$
   (c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$
   (d) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2)$

   Lösung: (a) Nein, denn $(1 - X^2)$ ist kein Primideal

   (b) Nein, denn $(X^3 + X^2 + 3X + 3)$ ist kein Primideal

   (c) Ja, wie Aufgabe 74

   (d) Ja, wie Aufgabe 74

15. Existiert ein Ringhomomorphismus wie folgt?

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
   (b) $f : \mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 - Y) \to \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1)$
   (c) $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X, Y]$ mit $f(X) = X$ und $f(X + 1) = Y$
   (d) $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ mit $f(X) = X$

   Lösung: (a) Nein, denn $f(\sqrt{2})$ müsste eine Wurzel aus 2 sein

   (b) Ja, mit $f(Y) = 1$ nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings

   (c) Nein, denn $f(X + 1) = f(X) + 1 = X + 1 \neq Y$

   (d) Ja, nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings die Fortsetzung von $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

16. Sei K ein beliebiger Körper. Die folgende Aussage ist wahr.

   (a) K ist Hauptidealring.
   (b) K ist faktoriell.
   (c) $K[X]$ ist faktoriell.
   (d) $K[X]$ ist Hauptidealring.

(e) $K[X, Y]$ ist Hauptidealring.

(f) $K[X, Y]$ ist faktoriell.

Lösung: (a) Ja, siehe Vorlesung

(b) Ja, siehe Vorlesung

(c) Ja, siehe Vorlesung

(d) Ja, siehe Vorlesung

(e) Nein, (X, Y) ist kein Hauptideal

(f) Ja, siehe Vorlesung

17. Welche der foldenden Polynome sind irreduzibel?

(a) $X^3 + 1$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(b) $175X^7 + 315X^3 + 225X^2 + 300$ in $\mathbb{Q}$

(c) $175X^7 + 315X^3 + 75X + 75$ in $\mathbb{Z}$

(d) $X^3 + 1$ in $\mathbb{Q}$

Lösung: (a) Nein, eine Nullstelle ist -1

(b) Ja, Eisenstein mit Primzahl 3

(e) Nein, eine Zerlegung ist $175X^7 + 315X^3 + 75X + 75 = 5 \cdot (35X^7 + 63X^3 + 15X + 15)$

(d) Nein, eine Nullstelle ist -1

18. Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Im Polynomring $\mathbb{F}_2[X, Y]$ sei $p := 1 + X^2 + Y^2 + XY^2$ und $q := 1 + X^2 + Y + XY$. Welche der foldenden Aussagen sind richtig?

(a) Es existieren $r, s \in \mathbb{F}_2[X, Y]$ mit $r \cdot p + s \cdot q = 1 + X^2 + XY + X^2Y$.

(b) Ein ggT von p und q ist 1.

(c) Ein ggT von p und q ist $1 + X$.

Lösung: (a) Ja, denn der ggT teilt $1 + X^2 + XY + X^2Y$

(b) Nein, wegen (c)

(c) Ja, nach dem Euklidischen Algorithmus

19. Sei $\varphi : R \to S$ ein injektiver Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subseteq R$ und $\mathfrak{b} \subseteq S$ Ideale in R bzw. S. Dann gilt (unabhängig von der wahl von $R, S, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$) die folgende Aussage.

(a) $\varphi[\mathfrak{a}]$ ist ein Ideal in $\varphi[S]$.

(b) $\varphi[\mathfrak{a}]$ ist ein Ideal in S.

(c) $\varphi^{-1}[\mathfrak{b}]$ ist ein Ideal in R.

Lösung: (a) Nein, denn $\varphi[S]$ ist kein wohldefinierter Ausdruck

(b) Nein, denn φ ist nicht notwendigerweise surjektiv

(c) Ja, nach Aufgabe 57a

20. Sei $\mathfrak{a} = (5, X^2 + X + 1) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ ein Ideal in $\mathbb{Z}[X]$. Die folgende Aussage ist wahr.

    (a) $\mathfrak{a}$ ist ein Hauptideal.

    (b) $\mathfrak{a}$ ist ein Primideal.

    Lösung: (a) Nein, wie in Aufgabe 75

    (b) Ja, wie in Aufgabe 75