

Algebra I

Musterlösung 0

Gruppenaxiome

0. Sei \circ eine assoziative binäre Operation auf einer nichtleeren Menge S , d.h. für alle x, y, z in S gilt

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

Zeige, dass für alle $a, b, c, d \in S$ gilt

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ (b \circ c)) \circ d.$$

Lösung: Mit $x := a \circ b$, $y := c$, $z := d$ folgt $(a \circ b) \circ (c \circ d) = ((a \circ b) \circ c) \circ d$. Nun können wir die Assoziativregel mit $x := a$, $y := b$, $z := c$ nochmals anwenden und erhalten $(a \circ b) \circ (c \circ d) = ((a \circ b) \circ c) \circ d = (a \circ (b \circ c)) \circ d$.

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und sei

$$\begin{aligned} \star : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto \text{ggT}(a, b), \end{aligned}$$

wobei $\text{ggT}(a, b)$ den *grössten gemeinsamen Teiler* von a und b bezeichnet.

- (a) Zeige, dass die Operation \star kommutativ und assoziativ ist.
 (b) Zeige, dass (A, \star) ein Neutralelement hat.
 (c) Zeige, dass (A, \star) keine Gruppe ist.

Bemerkung: Solche Strukturen werden *kommutative Monoide* genannt.

Lösung: (a) Kommutativität: Es gilt $\text{ggT}(a, b) = \max(\{m \in \mathbb{N} \mid m|a\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n|b\})$. Da der Durchschnitt von Mengen kommutativ ist, ist es auch der ggT.

Assoziativität: Wir wenden wieder die Definition des ggT an und erhalten

$$\begin{aligned} \text{ggT}(a, \text{ggT}(b, c)) &= \max(\{k \in \mathbb{N} \mid k|a\} \cap \{l \in \mathbb{N} \mid l|\max(\{m \in \mathbb{N} \mid m|b\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n|c\})\}) \\ &= \max(\{l \in \mathbb{N} \mid l|a\} \cap \{m \in \mathbb{N} \mid m|b\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n|c\}) \\ &= \max(\{k \in \mathbb{N} \mid k|\max(\{l \in \mathbb{N} \mid l|a\} \cap \{m \in \mathbb{N} \mid m|b\})\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n|c\}) \\ &= \text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c). \end{aligned}$$

(b) Für jedes $a \in A$ gilt $a|12$, daher ist $\text{ggT}(a, 12) = a$ und wegen $12 \in A$ ist 12 somit ein Neutralelement.

(c) Da für alle $a, b \in A$ die Ungleichung $\text{ggT}(a, b) \leq \min\{a, b\}$ gilt, hat kein Element aus $A \setminus \{12\}$ ein Inverses. Somit kann (A, \star) keine Gruppe sein.

2. Sei $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und sei \bullet die binäre Operation auf \mathbb{Q}^* , welche wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* &\rightarrow \mathbb{Q}^* \\ (p, q) &\mapsto 2pq. \end{aligned}$$

Zeige, dass (\mathbb{Q}^*, \bullet) eine abelsche Gruppe ist.

Lösung: Aus den Vorlesungen des Basisjahres wissen wir, dass diese Operation wohldefiniert und kommutativ ist. Für die Assoziativität benutzen wir Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation in \mathbb{Q} . Seien $p, q, r \in \mathbb{Q}^*$. Dann gilt

$$(p \bullet q) \bullet r = (2pq) \bullet r = 2(2pq)r = 4pqr = 2p(2qr) = p \bullet (q \bullet r).$$

Die Zahl $\frac{1}{2}$ ist offensichtlich ein linksneutrales Element und für jedes $p \in \mathbb{Q}$ gilt $\frac{1}{4p} \bullet p = \frac{1}{2}$, also besitzt jedes $p \in \mathbb{Q}^*$ ein linksinverses Element. Somit sind alle Axiome einer abelschen Gruppe erfüllt.

3. Sei $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^* := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0, 0)\}$ und sei \bullet die binäre Operation auf $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*$, welche wie folgt definiert ist:

$$(p_1, q_1) \bullet (p_2, q_2) := (p_1 p_2 - q_1 q_2, p_1 q_2 + q_1 p_2).$$

Zeige, dass $((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*, \bullet)$ eine abelsche Gruppe ist.

Lösung: Mit der Identifikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto x + iy$ entspricht die Operation \bullet genau der komplexen Multiplikation auf $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Wir wissen daher aus den Vorlesungen des Basisjahres, dass \bullet kommutativ und assoziativ ist und $(1, 0)$ ein Neutralement ist. Ausserdem gilt für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, dass $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ist. Wenn z rationalen Real- und Imagärteil hat, so gilt das auch für $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Also existieren auch inverse Elemente in $((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*, \bullet)$ und alle Axiome einer abelschen Gruppe sind erfüllt.

4. Sei (G, \circ) eine Gruppe mit Neutralement e .

Zeige: Gilt für jedes $a \in G$, $a \circ a = e$, so ist G abelsch.

Lösung: Die Bedingung $a \circ a = e$ ist äquivalent zu $a = a^{-1}$. Seien $g, h \in G$ beliebig. Dann gilt

$$g \circ h = g^{-1} \circ h^{-1} = (h \circ g)^{-1} = h \circ g,$$

also ist die Gruppe abelsch.

5. (a) Zeige: Jede Gruppe mit genau vier Elementen ist abelsch.
 (b) Finde zwei verschiedene (d.h. nicht isomorphe) Gruppen mit jeweils genau vier Elementen.

Lösung: (a) Sei $(\{a, b, c, e\}, \circ)$ eine Gruppe mit genau vier Elementen und Neutralement e . Betrachte das Produkt $a \circ b$. Wegen der Links- und Rechtskürzbarkeit gilt $a \circ b \neq a$ und $a \circ b \neq b$. Wenn $a \circ b = e$ gilt, dann wissen wir aus der Vorlesung, dass a und b kommutieren. Wenn $a \circ b = c$ gilt, dann kann $b \circ a$ wie oben weder b noch a sein, aber auch nicht e , denn sonst wäre b ein linksneutrales Element für a , aber kein rechtsinverses, was in einer Gruppe nicht sein kann. Also gilt $a \circ b = b \circ a$. Dasselbe Argument auf b und c sowie c und a angewendet ergibt Kommutativität.

(b) Bezeichne die Gruppe wieder mit $(\{a, b, c, e\}, \circ)$. Wir können zwei Fälle betrachten: Es gibt ein Element, das nicht selbstinvers ist und alle Elemente sind selbstinvers. Explizit heisst das entweder $a \circ a = b$ oder $a \circ a = b \circ b = c \circ c = e$. Diese Gruppen sind sicher nicht isomorph, denn für einen Isomorphismus φ müsste gelten

$$e = \varphi(e) \neq \varphi(b) = \varphi(a \circ a) = \varphi(a) \circ \varphi(a) = e.$$

Da wir wissen, dass in einer Gruppentafel jedes Element nur einmal pro Zeile und Spalte vorkommen darf, können wir in beiden Fällen die Tafel vollständig ausfüllen. Im ersten Fall ist die Tafel

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

und wir können prüfen, dass Assoziativität gilt. Der zweite Fall ergibt die Tafel

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

und wir können wieder Assoziativität prüfen. In beiden Fällen sehen wir, dass es sich um eine Gruppentafel handelt.

Bemerkung: In der ersten Gruppe bemerken wir, dass $a \circ a \circ a = c$ gilt. Es lässt sich also jedes Element als endliches Produkt von a mit sich selbst schreiben. Eine solche Gruppe nennt man *zyklisch*. Die abgebildete Gruppe entspricht den Rotationen eines Quadrats um die Winkel $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Bemerkung: Die zweite Gruppe heisst „Klein’sche Vierergruppe“. Sie beschreibt die Symmetrien eines nichtquadratischen Rechtecks.