

# Algebra I

## Musterlösung 2

Untergruppen, Nebenklassen, Normalteiler

---

**13.** Seien  $m = 12$  und  $n = 21$  und sei  $g$  ein Erzeuger der zyklischen Gruppe  $C_{mn}$ . Weiter sei  $x := g^{120}$ .

- (a) Zeige:  $\text{ord}(x) = n$ .  
 (b) Finde mehrere Elemente  $y, z \in C_{mn}$  mit

$$C_{mn} \neq \langle z \rangle, \quad C_{mn} = \langle y \rangle \quad \text{und} \quad z^m = y^m = x.$$

*Lösung:* Wir verwenden Aufgabe 6a). Diese besagt  $\text{ord}(g^k) = \frac{\text{kgV}(k, mn)}{k}$ .

(a) Aus Aufgabe 6a) wissen wir

$$\text{ord}(x) = \frac{\text{kgV}(120, 12 \cdot 21)}{120} = 21.$$

(b) Sei  $y = g^k$  mit  $0 \leq k < nm = 252$ . Wieder wegen Aufgabe 6a) muss  $k$  genau die Bedingungen

- $\frac{\text{kgV}(k, mn)}{k} = mn$  und
- $mk \in \{120 + amn : a \in \mathbb{Z}\} \cap \{0, 1, 2, \dots, mn - 1\}$

erfüllen. Die erste Bedingung ist äquivalent zu  $\text{ggT}(k, mn) = 1$ , was wiederum äquivalent ist dazu, dass  $k$  durch keine der Primzahlen 2, 3 oder 7 teilbar ist. Die zweite Bedingung ist äquivalent zu  $k \in \{10 + an : a \in \mathbb{Z}\} \cap \{0, 1, 2, \dots, mn - 1\}$ . Daraus folgt, dass die möglichen  $k$  genau  $k = 31, 73, 115, 157, 199, 241$  sind.

Sei nun  $z = g^l$  mit  $0 \leq l < nm$ . Wieder wegen Aufgabe 6a) muss  $l$  genau die Bedingungen

- $\frac{\text{kgV}(l, mn)}{l} < mn$  und
- $ml \in \{120, 120 + mn, 120 + 2mn, \dots\}$

erfüllen. Die erste Bedingung ist äquivalent zu  $\text{ggT}(l, mn) > 1$ , was wiederum äquivalent ist dazu, dass  $l$  durch mindestens eine der Primzahlen 2, 3 oder 7 teilbar ist. Die zweite Bedingung ist wieder äquivalent zu  $l \in \{10, 10 + n, 10 + 2n, \dots\}$ . Da  $n = 3 \cdot 7$  ist, aber 10 weder durch 3, noch durch 7 teilbar ist, kann  $10 + an$  für keine ganze Zahl  $a$  durch 3 oder 7 teilbar sein. Deshalb muss  $10 + an$  durch 2 teilbar sein, also ist  $a$  gerade. Daraus folgt, dass die möglichen  $l$  genau  $l = 10, 52, 94, 136, 178, 220$  sind.

**14.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$ . Definiere folgende Relation auf  $G$ :

$$g \sim g' \Leftrightarrow g'^{-1}g \in H.$$

- (a) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

- (b) Zeige, dass Äquivalenzklassen genau die Linksnebenklassen von  $H$  sind.
- (c) Nimm an, die Vorschrift  $[g] \circ [g'] := [gg']$  definiere eine wohldefinierte binäre Operation auf  $G/H$ . Zeige, dass  $H$  ein Normalteiler von  $G$  ist. (*Bemerkung:* In der Vorlesung wurde die Umkehrung dieser Aussage gezeigt.)

*Lösung:* (a) Wir müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nachprüfen. Sei  $g \in G$ . Dann gilt  $g^{-1}g = e \in H$ , also ist  $g \sim g$  und  $\sim$  ist reflexiv. Seien nun  $g, h \in G$  mit  $g \sim h$ . Das bedeutet  $h^{-1}g \in H$ . Dann ist auch  $(h^{-1}g)^{-1} = g^{-1}h \in H$ . Also folgt  $h \sim g$  und die Relation ist symmetrisch. Seien nun  $g, h, k \in G$  mit  $g \sim h$  und  $h \sim k$ . Das bedeutet  $h^{-1}g \in H$  und  $k^{-1}h \in H$ . Dann ist auch  $(k^{-1}h)(h^{-1}g) = k^{-1}g \in H$ . Also folgt  $g \sim k$  und die Relation ist transitiv.

(b) Sei  $g \in G$ . Wir müssen zeigen, dass  $[g] = gH$  gilt. Sei also  $g' \in [g]$ , das heisst  $g' \sim g$ . Dann existiert ein  $h \in H$  mit  $g^{-1}g' = h$ . Das ist äquivalent zu  $g' = gh$ , also folgt  $g' \in gH$ . Wir haben somit bewiesen, dass  $[g] \subseteq gH$  ist. Sei nun  $k \in gH$ . Dann existiert ein  $h \in H$  mit  $k = gh$ . Daraus folgt  $g^{-1}k = h \in H$  und somit ist  $k \sim g$ . Wir haben somit  $[g] \supseteq gH$  bewiesen und insgesamt folgt  $[g] = gH$ .

(c) Wir zeigen die Kontraposition. Sei  $H$  kein Normalteiler von  $G$ . Dann existieren  $g \in G$  und  $h \in H$  mit  $g^{-1}hg \notin H$ . Das ist äquivalent zu  $hg \notin gH$ . Wegen  $e \in H$  gilt  $[e] = [h]$ . Weiter sehen wir  $[e][g] = [g]$  und  $[h][g] = [hg]$ . Wegen  $hg \notin gH = [g]$  folgt daraus  $[h][g] \neq [e][g]$ . Also ist  $[g] \circ [g'] := [gg']$  keine wohldefinierte Operation.

15. Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $U, V$  nichtleere Teilmengen von  $G$ . Wir definieren

$$UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$

$$U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}.$$

- (a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- i.  $U$  ist eine Untergruppe von  $G$ .
  - ii.  $UU \subseteq U$  und  $U^{-1} \subseteq U$ .
  - iii.  $UU^{-1} \subseteq U$ .
- (b) Falls  $U$  und  $V$  Untergruppen von  $G$  sind, dann ist  $UV$  genau dann eine Untergruppe von  $G$ , wenn  $UV = VU$  gilt.
- (c) Ist  $U$  endlich, dann ist  $U$  bereits dann eine Untergruppe, wenn  $UU \subseteq U$  gilt.

*Lösung:* (a) Wir zeigen zuerst i.  $\Leftrightarrow$  ii. Die Bedingung  $UU \subseteq U$  ist äquivalent zu  $\forall u, u' \in U: uu' \in U$ . Die Bedingung  $U^{-1} \subseteq U$  ist äquivalent zu  $\forall u \in U: u^{-1} \in U$ . Da  $U$  laut Voraussetzung nicht leer ist, ist das nach der Vorlesung äquivalent dazu, dass  $U$  eine Untergruppe ist.

Wir zeigen nun i.  $\Leftrightarrow$  iii. Die Bedingung  $UU^{-1} \subseteq U$  ist äquivalent zu  $\forall u, u' \in U: uu'^{-1} \in U$ . Da  $U$  laut Voraussetzung nicht leer ist, entspricht das genau der Definition einer Untergruppe aus der Vorlesung.

- (b) Wir beobachten zuerst, dass für eine Untergruppe  $H \leq G$  gilt

$$H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\} = H,$$

da die Abbildung  $H \rightarrow H, h \mapsto h^{-1}$  bijektiv ist.

Sei  $UV \leq G$ . Nach obiger Beobachtung folgt  $(UV)^{-1} \subseteq UV$ . Andererseits folgt aus  $U^{-1} = U$  und  $V^{-1} = V$  die Gleichheit

$$(UV)^{-1} = \{uv : u \in U, v \in V\}^{-1} = \{v^{-1}u^{-1} : u \in U, v \in V\} = V^{-1}U^{-1} = VU,$$

also gilt  $UV = VU$ .

Sei nun  $UV = VU$ . Widerum gilt

$$(UV)^{-1} = \{uv : u \in U, v \in V\}^{-1} = \{v^{-1}u^{-1} : u \in U, v \in V\} = V^{-1}U^{-1} = VU,$$

also folgt  $(UV)^{-1} = UV$ . Ausserdem beobachten wir, dass sich das Assoziativgesetz auf Teilmengen von  $G$  übertragen lässt. Seien nämlich  $A, B, C \subseteq G$  alle nicht leer. Dann gilt

$$(AB)C = \{ab : a \in A, b \in B\}C = \{abc : a \in A, b \in B, c \in C\} = A(BC).$$

Also ist

$$\begin{aligned}(UV)(UV) &= \{uvu'v' : u, u' \in U, v, v' \in V\} \\ &= (U(VU))V = (U(UV))V = (UU)(VV) \subseteq UV.\end{aligned}$$

Weiters ist wegen  $U \neq \emptyset \neq V$  auch  $UV \neq \emptyset$ . Daher ist  $UV$  nach Teil (a) eine Untergruppe von  $G$ .

(c) Wir müssen nachprüfen, dass  $U^{-1} \subseteq U$  gilt. Sei  $u \in U$ . Falls  $u = e$  ist, dann gilt trivialerweise auch  $u^{-1} = e \in U$ . Sei nun  $u \neq e$ . Es gilt  $u^{|U|} = 1$  oder äquivalenterweise  $u^{-1} = u^{|U|-1}$ . Wir definieren induktiv  $U^1 := U$  und

$$U^n := UU^{n-1} = \{u_1u_2 \dots u_n : u_1, \dots, u_n \in U\}.$$

Also ist  $u^{-1} \in U^{|U|-1} = (UU)U^{|U|-3} \subseteq UU^{|U|-3} = U^{|U|-2} \subseteq \dots \subseteq U$ . Das beweist  $U^{-1} \subseteq U$ . Da  $U$  nach Voraussetzung nicht leer ist, ist es somit eine Untergruppe von  $G$ .

**16.** Sei  $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$ .

- Zeige, dass  $\mathbb{U}$  ein Normalteiler von  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  ist.
- Beschreibe die Menge  $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$ .
- Finde eine Gruppe, die isomorph zur Faktorgruppe  $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$  ist.

*Lösung:* (a) Offensichtlich gilt  $1 \in \mathbb{U}$ . Ausserdem gilt für alle  $w, z \in \mathbb{C}^*$  die Gleichheit  $|w^{-1}z| = |w|^{-1}|z|$ . Wenn  $w, z \in \mathbb{U}$  sind, gilt also auch  $|w^{-1}z| = 1$  und somit  $w^{-1}z \in \mathbb{U}$ . Deshalb ist  $\mathbb{U}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{C}^*$ . Da komplexe Multiplikation kommutativ ist, ist  $\mathbb{U}$  damit automatisch ein Normalteiler.

(b) Jedes  $z \in \mathbb{C}^*$  können wir in Polarkoordinaten als  $z = re^{i\varphi}$  mit  $r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}$  schreiben. Ausserdem ist  $\mathbb{U} = \{re^{i\vartheta} : \vartheta \in \mathbb{R}\}$ . Damit sehen wir

$$z\mathbb{U} = \{re^{i(\varphi+\vartheta)} : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \{re^{i\varphi} : \vartheta \in \mathbb{R}\}.$$

Die Menge  $z\mathbb{U}$  ist somit der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius  $|z|$ .

(c) Wir behaupten, dass die Abbildung

$$f: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow \mathbb{C}^*/\mathbb{U}, r \mapsto r\mathbb{U}$$

ein Isomorphismus ist. Wir zeigen zuerst Injektivität. Seien  $r, r' \in \mathbb{R}^+$  mit  $f(r) = f(r')$ . Das bedeutet es gibt ein  $z \in \mathbb{U}$  mit  $rz = r'$ , also  $\frac{r'}{r} = z$ . Es folgt, dass  $z \in \mathbb{R}^+$  sein muss. Da  $z$  ausserdem Betrag 1 hat, folgt  $z = 1$ . Also ist  $r = r'$  und  $f$  ist injektiv. Als nächstes zeigen wir Surjektivität. Sei  $z\mathbb{U}$  eine Nebenklasse. Dann ist wieder  $z = re^{i\varphi}$  und für dieses  $r$  gilt  $f(r) = z\mathbb{U}$ . Zuletzt müssen wir zeigen, dass für alle  $r, r' \in \mathbb{R}^+$  die Gleichheit  $f(rr') = f(r)f(r')$  gilt. Da  $\mathbb{U}$  ein Normalteiler ist, folgt  $f(rr') = rr'\mathbb{U} = r\mathbb{U}r'\mathbb{U} = f(r)f(r')$ . Somit haben wir gezeigt, dass  $f$  ein Gruppenisomorphismus ist.

17. Finde alle Untergruppen von  $D_4$  sowie alle Inklusionen zwischen diesen. Gib an, in welchen Fällen es sich um einen Normalteiler handelt und bestimme die entsprechende Faktorgruppe.

*Lösung:* Die Diedergruppe  $D_4$  mit 8 Elementen ist die Symmetriegruppe des Quadrates und besteht aus der Identität, drei Rotationen  $T, T^2, T^3$  (um  $\frac{\pi}{2}$ , um  $\pi$  und um  $\frac{3\pi}{2}$ ) und 4 Spiegelungen  $S, ST, ST^2, ST^3$ .

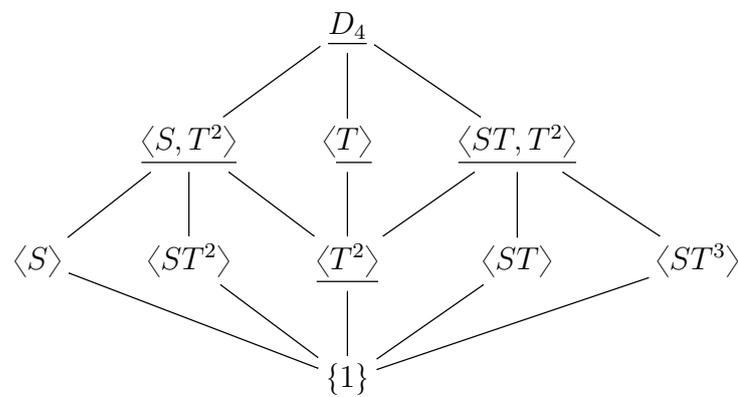
Sei  $H$  eine Untergruppe von  $D_4$ . Wir unterscheiden vier Fälle:

- $H$  ist die triviale Untergruppe  $\{1\}$ .
- $H$  ist nicht trivial und besteht nur aus Rotationen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten für  $H$ . Falls  $H$  nämlich  $T$  oder  $T^3$  enthält, dann umfasst  $H$  auch alle anderen Rotationen (insbesondere die Identität!) und ist zyklisch von Ordnung 4, da sich alle Rotationen als Potenzen von  $T$  bzw.  $T^3 = T^{-1}$  schreiben lassen. Andernfalls besteht  $H$  aus der Identität und der Rotation  $T^2$  um  $\pi$  und ist zyklisch von Ordnung 2.
- $H$  besteht aus der Identität und einer Spiegelung. Da  $S'^2 = 1$  für jede Spiegelung  $S'$  gilt, bildet jede Spiegelung mit der Identität zusammen eine Untergruppe von  $D_4$ . Somit gibt es in diesem Fall vier Möglichkeiten für  $H$  (alle zyklisch von Ordnung 2).
- $H$  enthält die Identität, eine Spiegelung  $S'$  und mindestens ein weiteres Element. Dieses ist entweder eine Spiegelung ungleich  $S'$  oder eine nicht-triviale Rotation. Falls es eine Spiegelung ist, ist seine Verknüpfung mit  $S'$  eine nicht-triviale Rotation. Deshalb enthält  $H$  sicher eine nicht-triviale Rotation  $R$ .

Falls  $R = T$  oder  $R = T^3$  ist, umfasst  $H$  wie im zweiten Fall auch alle anderen Rotationen und auch alle 4 Spiegelungen, da  $S', S'R, S'R^2, S'R^3$  paarweise verschiedene Spiegelungen sind. In diesem Fall ist also  $H = D_4$ .

Andernfalls ist  $R = T^2$  eine Rotation um  $\pi$  und  $H$  enthält keine weiteren nicht-trivialen Rotationen. Dann ist  $H = \{1, S', T^2, S'T^2\}$  eine Diedergruppe mit 4 Elementen, denn  $H$  enthält die beiden Spiegelungen  $S'T$  und  $S'T^3$  nicht, da  $T$  und  $T^3$  keine Elemente von  $H$  sind. Es gibt genau zwei solche Möglichkeiten für  $H$ , denn  $\{S', S'T^2\} = \{S, ST^2\}$  oder  $\{S', S'T^2\} = \{ST, ST^3\}$ . Die Untergruppe  $H$  enthält also entweder die Spiegelungen an den Diagonalen des Quadrates oder diejenigen an den zu den Quadratseiten parallelen Symmetrieachsen.

Insgesamt hat  $H$  somit 10 Untergruppen mit folgenden Inklusionen (bei den unterstrichenen Untergruppen handelt es sich um Normalteiler, siehe unten):



Wir überprüfen nun für je zwei Untergruppen  $H, H'$  von  $D_4$  mit  $H' \subseteq H$ , ob  $H' \triangleleft H$  gilt. Da jede Gruppe der Ordnung 1, 2 oder 4 abelsch ist und jede Untergruppe einer abelschen Gruppe normal ist, ist  $H' \triangleleft H$  immer erfüllt, wenn  $H \neq D_4$ .

Offensichtlich sind  $\{1\}$  und  $D_4$  Normalteiler von  $D_4$ . Durch explizites Einsetzen stellen wir fest, dass alle Untergruppen mit 4 Elementen, also  $\langle T \rangle$ ,  $\langle S, T^2 \rangle$  und  $\langle ST, T^2 \rangle$ , Normalteiler von  $D_4$  sind (später wird dies aus einer allgemeineren Aussage über den Index folgen). Die Untergruppen  $\langle S \rangle$ ,  $\langle ST \rangle$ ,  $\langle ST^2 \rangle$  und  $\langle ST^3 \rangle$  sind keine Normalteiler von  $D_4$ , denn sie sind nicht abgeschlossen unter Konjugation mit dem Element  $T$ . Schliesslich können wir wieder durch explizites Einsetzen überprüfen, dass  $\langle T^2 \rangle$  ein Normalteiler von  $D_4$  ist.

In allen Fällen, in denen  $[H : H'] = 2$  gilt, ist die Faktorgruppe isomorph zu  $C_2$ , da dies bis auf Isomorphie die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist. Die einzigen übrigen Fälle sind  $D_4/\langle T^2 \rangle$  und  $\langle T \rangle/\{e\}$ . Letzteres ist isomorph zu  $\langle T \rangle \cong C_4$ . Die Gruppe  $D_4/\langle T^2 \rangle$  ist isomorph zu  $C_4$  oder  $C_2 \times C_2$ . Da sowohl die Nebenklasse von  $T$  als auch die Nebenklasse von  $S$  Ordnung 2 haben, aber verschieden sind, hat  $D_4/\langle T^2 \rangle$  mindestens zwei Elemente der Ordnung 2. Somit ist sie isomorph zu  $C_2 \times C_2$ .

*Bemerkung:* Es gilt zwar  $\langle S \rangle \triangleleft \langle S, T^2 \rangle$  und  $\langle S, T^2 \rangle \triangleleft D_4$ , aber nicht  $\langle S \rangle \triangleleft D_4$ . Wir haben also an einem Gegenbeispiel gezeigt, dass für Untergruppen  $M, N, K$  einer Gruppe  $G$

$$(M \triangleleft N \wedge N \triangleleft K) \not\Rightarrow M \triangleleft K.$$

**18.** Sei  $T$  die Symmetriegruppe des regulären Tetraeders.

- (a) Bestimme  $|T|$ .
- (b) Zeige, dass  $T$  nicht abelsch ist.
- (c) Bestimme alle Untergruppen von  $T$ .
- (d) Welche Untergruppen von  $T$  sind nichttriviale Normalteiler?

*Lösung:* (a) Ein Tetraeder hat vier Seitenflächen. Ein Element der Symmetriegruppe kann die Grundfläche  $F$  so auf jede der vier Seitenflächen abbilden, dass eine beliebige Ecke von  $F$  auf eine bestimmte der drei Ecken der Seitenfläche abgebildet wird. Dadurch ist die Bewegung des Tetraeders eindeutig bestimmt. Es gibt also insgesamt  $4 \cdot 3 = 12$  Möglichkeiten, somit ist  $|T| = 12$ .

(b) Bezeichne mit  $A, B, C, D$  die Ecken des Tetraeders. Betrachte das nichttriviale Element  $R_D \in T$  mit  $\sigma(D) = D$ , das  $A, B, C$  zyklisch vertauscht und das Element  $R_A \in T$ , das  $A$  fest lässt und  $B, C, D$  zyklisch vertauscht. Dann gilt  $R_D \circ R_A(A) = B$ , aber  $R_A \circ R_D(A) = C$ .

(c) Das Element  $R_A$  erzeugt die Untergruppe von  $T$ , die die Ecke  $A$  fest lassen. Diese ist isomorph zu  $C_3$ , hat also keine weiteren Untergruppen mehr. Bezeichne analog  $R_B$  das Element, das  $C, D, A$  zyklisch vertauscht und  $R_C$  das Element, das  $D, A, B$  zyklisch vertauscht. Genauso erzeugen  $R_B, R_C$  und  $R_D$  Untergruppen isomorph zu  $C_3$ , die eine Ecke fest lassen.

Sei nun  $\sigma \in T$  mit  $\sigma(A) = B$ . Falls  $\sigma(B) = A$  gilt, dann vertauscht  $\sigma$  auch  $B$  und  $C$ . Wir bezeichnen dieses Element  $\sigma$  mit  $S_{AB} = S_{CD}$ . Es erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 2. Analog bekommen wir Elemente  $S_{AC} = S_{BD}$  und  $S_{AD}$ , die Untergruppen der Ordnung 2 erzeugen.

Falls  $\sigma(B) = C$  gilt, lässt  $\sigma$  das Dreieck  $A, B, C$  und daher die Ecke  $D$  invariant. Diesen Fall haben wir schon betrachtet.

Da  $|T| = 12$  ist, gilt

$$T = \{e, R_A, R_A^2, R_B, R_B^2, R_C, R_C^2, R_D, R_D^2, S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}\}.$$

Das Produkt von zwei verschiedenen Elementen aus der Menge  $\{S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}\}$  ergibt jeweils das dritte. Also ist  $\{e, S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}\} = \langle S_{AB}, S_{AC} \rangle \cong C_2 \times C_2$ .

Wir wollen zeigen, dass die Liste  $\{e\}, \langle R_A \rangle, \langle R_B \rangle, \langle R_C \rangle, \langle R_D \rangle, \langle S_{AB} \rangle, \langle S_{AC} \rangle, \langle S_{AD} \rangle, \langle S_{AB}, S_{AC} \rangle$  und  $T$  bereits alle Untergruppen umfasst.

Eine Untergruppe von  $T$  hat Ordnung 1, 2, 3, 4, 6 oder 12. Die Liste enthält sicher alle Untergruppen der Ordnungen 1 und 12, da nur die triviale Gruppe und die ganze Gruppe diese Ordnungen haben können. Weiter enthält die Liste offenbar alle zyklischen Untergruppen von  $T$  und deshalb sind bereits alle Untergruppen der Ordnung 2 und 3 vertreten. Eine Untergruppe der Ordnung 4 darf kein Element der Ordnung 3 enthalten, da die Ordnung jedes Elements die Gruppenordnung teilt. Es gibt in  $T$  aber nur vier Elemente, die nicht Ordnung 3 haben. Deshalb ist  $\langle S_{AB}, S_{AC} \rangle$  die einzige Untergruppe der Ordnung 4.

Eine Untergruppe  $H$  der Ordnung 6 muss isomorph zu  $C_6$  oder  $D_3$  sein, da dies bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 6 sind. Ausserdem muss sie nach dem Satz von Lagrange Index 2 haben und deshalb ein Normalteiler sein. Da die Liste zwar alle zyklischen Untergruppen von  $T$  enthält, aber keine, die isomorph zu  $C_6$  ist, muss  $H \cong D_3$  gelten. Dann enthält  $H$  ein Element der Ordnung 2 und ein Element der Ordnung 3. Wegen Symmetrie können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $R_A \in H$  liegt, also  $\langle R_A \rangle \leq H$ . Es gilt  $R_B^{-1} \circ R_A \circ R_B(D) = D$ , also ist  $R_B^{-1} \circ R_A \circ R_B \in \{R_D, R_D^2\}$ . Wegen Normalität und wegen  $R_D^2 = R_D^{-1}$  folgt  $R_D \in H$ , analog liegen ebenso  $R_B, R_C \in H$  und natürlich auch deren Quadrate. Somit hat  $H$  bereits acht Elemente der Ordnung 3, was bei  $|H| = 6$  nicht sein kann. Deshalb kann  $T$  keine Untergruppe der Ordnung 6 haben und obige Liste ist vollständig.

Wegen  $R_B^{-1} \circ R_A \circ R_B \in \{R_D, R_D^{-1}\}$  sind die Gruppen  $\langle R_A \rangle$  und  $\langle R_D \rangle$  zueinander konjugiert. Analog sind diese Gruppen auch konjugiert zu  $\langle R_B \rangle$  und  $\langle R_C \rangle$ . Insbesondere ist keine dieser Untergruppen normal in  $T$ .

Eine zu  $\langle S_{AB}, S_{AC} \rangle$  konjugierte Untergruppe von  $T$  muss ebenfalls Ordnung 4 haben. Da  $\langle S_{AB}, S_{AC} \rangle$  die einzige solche Untergruppe von  $T$  ist, ist sie somit normal.

Zuletzt rechnen wir  $R_A^{-1} \circ S_{AB} \circ R_A(A) = D$  und  $R_A^{-1} \circ S_{AB} \circ R_A(D) = A$ , also gilt  $R_A^{-1} \circ S_{AB} \circ R_A = S_{AD}$ . Deshalb sind  $\langle S_{AB} \rangle$  und  $\langle S_{AD} \rangle$  zueinander konjugiert. Analog sehen wir, dass alle Untergruppen der Ordnung 2 zueinander konjugiert sind.