Algebra I

Musterlösung 5

Sylowsätze, Permutationsgruppen

---

31. Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 100 nicht sowohl eine zu C_4 isomorphe als auch eine zu $C_2 \times C_2$ isomorphe Untergruppe besitzen kann.

Lösung: Sei G eine Gruppe der Ordnung 100. Da $100 = 2^2 \cdot 5^2$ ist, ist jede Untergruppe von G der Ordnung 4 eine 2-Sylowuntergruppe. Nach den Sylowsätzen sind je zwei Sylow 2-Untergruppen zueinerander konjugiert. Seien $H, H' \leqslant G$ zwei Sylow 2-Untergruppen. Es existiert also ein $g \in G$ mit $gHg^{-1} = H'$. Die Abbildung $\varphi\colon G \to G$, $\varphi(h) = ghg^{-1}$ ist ein Gruppenautomorphismus mit $\varphi(H) = H'$, induziert also einen Gruppenisomorphismus $H \to H'$. Also sind H und H' isomorph. Insbesondere kann nicht eine von ihnen isomorph zu C_4 und die andere isomorph zu $C_2 \times C_2$ sein.

32. Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^2.

Dann ist G abelsch.

Lösung: Siehe Proposition 8.5. im Skript.

33. Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 40 oder 56 nie einfach ist.

Sei G eine Gruppe der Ordnung $40 = 2^3 \cdot 5$. Nach den Sylowsätzen gilt $|\operatorname{Syl}_5(G)| \mid 8$ und $|\operatorname{Syl}_5(G)| \equiv 1 \mod 5$. Das impliziert $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 1$. Da Konjugation mit einem Element aus G jede Untergruppe von G auf eine Gruppe derselben Ordnung schickt und es nur eine Untergruppe der Ordnung 5 gibt ist diese invariant unter Konjugation, also normal. Somit haben wir einen nichttrivialen Normalteiler von G gefunden und G ist nicht einfach.

Sei G eine Gruppe der Ordnung $56 = 2^3 \cdot 7$. Nach den Sylowsätzen gilt $|\operatorname{Syl}_7(G)| \mid 8$ und $|\operatorname{Syl}_7(G)| \equiv 1 \mod 7$. Somit gibt es entweder genau eine oder genau acht Sylow 7-Untergruppen. Falls es genau eine gibt, ist diese wie oben ein Normalteiler. Nimm an, es gibt acht Sylow 7-Untergruppen. Diese sind alle zyklisch und von jedem ihrer nichttrivialen Elemente erzeugt. Daher haben je zwei Sylow 7-Untergruppen trivialen Schnitt. Somit hat die Vereinigung aller Sylow 7-Untergruppen genau $(7-1) \cdot 8 + 1 = 49$ Elemente. Die Anzahl aller Sylow 2-Untergruppen ist ungerade und teilt 7, ist also 1 oder 7. Wenn sie 7 ist, haben diese insgesamt mindestens 8 Elemente der Ordnung $2, 4$ oder 8. Ausserdem müssen Sylowuntergruppen zu verschiedenen Primzahlen wegen des Satzes von Lagrange immer trivialen Schnitt haben. Somit haben wir $56 = |G| \geqslant 49 + 8 = 57$. Das ist ein Widerspruch, also hat G genau eine Sylow 7-Untergruppe oder genau eine Sylow 2-Untergruppe und diese ist wie oben normal.

34. (a) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Tetraedergruppe.

(b) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Würfelgruppe.

(c) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Dodekaedergruppe.

Lösung: (a) In Aufgabe 18 haben wir die Kardinalität und alle Untergruppen der Tetraedergruppe bestimmt. Es gilt $T = 2^2 \cdot 3$. Es gibt genau eine Sylow 2-Untergruppen und genau vier Sylow 3-Untergruppen.

(b) Eine Würfeldrehung ist durch das Bild einer Ecke und eines ihrer Nachbarn eindeutig bestimmt. Damit gilt $|W| = 8 \cdot 3 = 24$. Die Menge aller Drehungen an einer bestimmten Würfeldiagonalen d sind offensichtlich eine Untergruppe der Ordnung 3. Daher ist das eine Sylow 3-Untergruppe H. Sei $g \in W$. Dann ist gHg^{-1} die Menge aller Drehungen an der Würfeldiagonalen $g[d]$. Da es genau vier Würfeldiagonalen gibt, gibt es somit auch genau vier Sylow 3-Untergruppen.

Sei Q das Quadrat parallel zur Grundfläche durch den Mittelpunkt des Würfels. Die Menge aller Würfeldrehungen, die Q in sich selbst überführen, ist offensichtlich eine Untergruppe der Ordnung 8. Daher ist das eine Sylow 2-Untergruppe K. Sei $g \in W$. Dann ist gKg^{-1} die Menge aller Drehungen am Quadrat $g[Q]$. Da es genau drei Quadrate parallel zu Seitenflächen durch den Mittelpunkt gibt, gibt es somit auch genau drei Sylow 2-Untergruppen.

(c) Sei ι die Identität.

Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_{15}$ die 15 Drehungen um π um die 15 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten.

Seien $\tau_1, \ldots, \tau_{10}$ die 10 Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ (mit jeweils einem festgelegten Drehsinn) um die 10 Achsen durch gegenüberliegende Ecken.

Seien $\rho_1, \ldots, \rho_6$ die 6 Drehungen um $\frac{2\pi}{5}$ (mit jeweils einem festgelegten Drehsinn) um die 6 Achsen durch Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen.

Dann sind ι, σ_h $(1 \leqslant h \leqslant 15)$, τ_i^k $(1 \leqslant i \leqslant 10, 1 \leqslant k \leqslant 2)$, ρ_j^l $(1 \leqslant j \leqslant 6, 1 \leqslant l \leqslant 4)$ die 60 Elemente der Dodekaedergruppe D (mit Verknüpfung als Gruppenoperation).

Da 5 eine Primzahl ist sind alle Sylow 5-Untergruppen von D zyklisch. Daher gilt $\mathrm{Syl}_5(D) = \{\langle \rho_j \rangle : 1 \leqslant j \leqslant 6\}$, *d.h.* D besitzt 6 Sylow 5-Untergruppen; es gilt $6 \equiv 1 \mod 5$ und $6 \mid 12$.

Da 3 eine Primzahl ist sind alle Sylow 3-Untergruppen von D zyklisch. Daher gilt $\mathrm{Syl}_3(D) = \{\langle \tau_i \rangle : 1 \leqslant i \leqslant 10\}$, *d.h.* D besitzt 10 Sylow 3-Untergruppen; es gilt $10 \equiv 1 \mod 3$ und $10 \mid 20$.

Die Sylow 2-Untergruppen von D sind genau die Untergruppen der Ordnung 4. Die 15 Drehachsen, welche durch Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen, können in fünf Tripel zu jeweils 3 Achsen aufgeteilt werden, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Sind nun $\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3}$ die Drehungen um π um drei zueinander senkrecht stehender Achsen, so ist die Gruppe $\{\iota, \sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3}\} \cong C_2 \times C_2$ eine Sylow 2-Untergruppe von D. Wie oben können wir sehen, dass jedes $g \in D$ ein solches Tripel auf ein anderes solches Tripel schickt und $g\{\iota, \sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3}\}g^{-1}$ die Untergruppe von D ist, die aus Drehungen an den Bildern unter g des Diagonalentripels besteht. Davon gibt es, wie bereits erwähnt, genau fünf und deshalb gibt es genau fünf Sylow 2-Untergruppen. Es gilt $5 \equiv 1 \mod 2$ und $5 \mid 15$.

35. (a) Bestimme für jede natürliche Zahl n das Zentrum von S_n und A_n.

(b) Berechne den Zentralisator von $(2\,3\,4)$ in S_5.

(c) Berechne den Zentralisator von $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$ in S_7.

(d) Bestimme den Normalisator der Untergruppe $\langle(2\,3\,4)\rangle$ in S_5.

(e) Bestimme den Normalisator der Untergruppe $\langle(1\,2\,3)(4\,5\,6)\rangle$ in S_7.

Lösung: (a) Für $n = 1$ und $n = 2$ ist S_n abelsch, es gilt also $Z(S_1) = S_1$ und $Z(S_2) = S_2$.

Sei nun $n \geqslant 3$ und $\sigma \neq id$ ein nicht-triviales Element von S_n. Dafür gibt es ein i mit $\sigma(i) \neq i$ und ein $k \notin \{i, \sigma(i)\}$. Für $\tau := (\sigma(i)\ k)$ ist dann

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)(i) &= \sigma(i) \\ (\tau\sigma)(i) &= k, \end{aligned}$$

insbesondere $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, also ist $\sigma \notin Z(S_n)$. Da σ ein beliebiges nicht-triviales Element von S_n war, folgt $Z(S_n) = \{id\}$.

Für $n \leqslant 3$ ist A_n abelsch, es gilt also $Z(A_n) = A_n$.

Sei nun $n \geqslant 4$. Dann lässt sich obiges Argument mit $k, l \notin \{i, \sigma(i)\}$ und $\tau := (\sigma(i)\,k\,l)$ wiederholen. Daher gilt $Z(A_n) = \{id\}$.

(b) Ein Element $\sigma \in S_5$ liegt genau dann im Zentralisator von $(2\,3\,4)$, wenn

$$(2\,3\,4) = \sigma(2\,3\,4)\sigma^{-1} = (\sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4))$$

ist. Allgemein gilt für Dreizykel

$$(a\,b\,c) = (d\,e\,f) \Leftrightarrow (d, e, f) \in \{(a, b, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b)\}, \tag{1}$$

wobei (d, e, f) das Tripel und nicht den Zykel bezeichnet. Deshalb gibt es für die Einschränkung von σ auf $\{2, 3, 4\}$ die drei Möglichkeiten $id, (2\,3\,4), (2\,4\,3)$. Da dabei $\{2, 3, 4\}$ auf sich abgebildet wird, muss auch $\{1, 5\}$ auf sich abgebildet werden. Somit ist die Einschränkung von σ auf $\{1, 5\}$ entweder die Identität oder die Transposition $(1\,5)$. Insgesamt gibt es daher 6 Elemente im Zentralisator von $(2\,3\,4)$:

$$Z_{S_5}((2\,3\,4)) = \{id,\ (2\,3\,4),\ (2\,4\,3),\ (1\,5),\ (1\,5)(2\,3\,4),\ (1\,5)(2\,4\,3)\}.$$

(c) Ein Element $\sigma \in S_7$ liegt ganau dann im Zentralisator von $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$, wenn

$$(1\,2\,3)(4\,5\,6) = \sigma(1\,2\,3)(4\,5\,6)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))(\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6))$$

ist. Diese Gleichheit gilt in den beiden Fällen

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (1\,2\,3) = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)),\quad (4\,5\,6) = (\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)) \\ \text{(ii)} & (1\,2\,3) = (\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)),\quad (4\,5\,6) = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)). \end{array}$$

Wegen (1) gibt es je solchen Fall $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten für die Einschränkung von σ auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dabei wird $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ auf sich abgebildet, darum muss $\sigma(7) = 7$ in beiden Fällen gelten. Somit hat der Zentralisator von $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$ genau $2 \cdot 9 = 18$ Elemente (je Zeile alle Elemente mit einer festen Einschränkung von σ auf $\{1, 2, 3\}$ aufgelistet):

$$\begin{aligned} Z_{S_7}((1\,2\,3)(4\,5\,6)) = \{ & id, (4\,5\,6), (4\,6\,5), \\ & (1\,2\,3), (1\,2\,3)(4\,5\,6), (1\,2\,3)(4\,6\,5), \\ & (1\,3\,2), (1\,3\,2)(4\,5\,6), (1\,3\,2)(4\,6\,5), \\ & (1\,4)(2\,5)(3\,6), (1\,4\,2\,5\,3\,6), (1\,4\,3\,6\,2\,5), \\ & (1\,5\,2\,6\,3\,4), (1\,5\,3\,4\,2\,6), (1\,5)(2\,6)(3\,4), \\ & (1\,6\,3\,5\,2\,4), (1\,6)(2\,4)(3\,5), (1\,6\,2\,4\,3\,5)\}. \end{aligned}$$

(d) Wenn wir S_3 als symmetrische Gruppe auf der Menge $\{2, 3, 4\}$ auffasen, gilt $\langle(2\,3\,4)\rangle = A_3 \trianglelefteq S_3$. Ausserdem kommutiert $(1\,5)$ mit $(2\,3\,4)$, da die beiden Zykeln elementfremd sind. Also liegt $(1\,5)$ auch im Normalisator. Sei nun $\sigma \in S_5 \backslash \langle S_3 \cup \{(1\,5)\}\rangle$. Dann existiert ein Element in $\{2, 3, 4\}$ dessen Bild uner σ ein Element aus $\{1, 5\}$ ist. Dann kommen im Dreizykel

$\sigma(2\,3\,4)\sigma^{-1} = (\sigma(2)\,\sigma(3)\,\sigma(4))$ Elemente aus $\{1, 5\}$ vor, daher liegt er nicht in $\langle(2\,3\,4)\rangle$ und σ liegt somit nicht im gesuchten Normalisator. Also besteht $N_{S_5}(\langle(2\,3\,4)\rangle)$ aus genau jeden Permutationen, die die Mengen $\{1, 5\}$ und $\{2, 3, 4\}$ invariant lassen.

(e) Sei $\sigma \in S_n$. Es gilt $\sigma(1\,2\,3)(4\,5\,6)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\,\sigma(2)\,\sigma(3))(\sigma(4)\,\sigma(5)\,\sigma(6))$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten lässt σ die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ invariant, im zweiten vertauscht es sie.

Im ersten Fall sehen wir, dass es für jede Permutation von $\{1, 2, 3\}$ und jedes Bild von 4 genau eine σ gibt, das im gesuchten Normalisator liegt. Das sind 18 Möglichkeiten.

$$
\begin{aligned}
\sigma &= id \\
\sigma &= (4\,5\,6) \\
\sigma &= (4\,6\,5) \\
\sigma &= (1\,2)(5\,6) \\
\sigma &= (1\,2)(4\,5) \\
\sigma &= (1\,2)(4\,6) \\
\sigma &= (2\,3)(5\,6) \\
\sigma &= (2\,3)(4\,5) \\
\sigma &= (2\,3)(4\,6) \\
\sigma &= (1\,3)(5\,6) \\
\sigma &= (1\,3)(4\,5) \\
\sigma &= (1\,3)(4\,6) \\
\sigma &= (1\,2\,3) \\
\sigma &= (1\,2\,3)(4\,5\,6) \\
\sigma &= (1\,2\,3)(4\,6\,5) \\
\sigma &= (1\,3\,2) \\
\sigma &= (1\,3\,2)(4\,5\,6) \\
\sigma &= (1\,3\,2)(4\,6\,5)
\end{aligned}
$$

Im zweiten Fall ist jedes Mögliche σ ein Produkt von $(1\,4)(2\,5)(3\,6)$ und einem Element aus obiger Liste. Es gibt also wieder 18 Möglichkeiten, die wir jetzt nicht alle aufzählen. Jedes σ ist durch das Bild von 1 (drei Möglichkeiten), 2 (zwei verbleibende Möglichkeiten) und 4 (wieder drei Möglichkeiten) eindeutig bestimmt.

36. Sei p eine Primzahl und sei $H \leqslant S_p$ eine Untergruppe, die einen p-Zykel und eine Transposition enthält.

Zeige, dass $H = S_p$ gilt.

Lösung: Die zu beweisende Aussage ist invariant unter Konjugation, d.h. für alle $\alpha \in S_p$ erzeugen zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_p$ genau dann S_p, wenn $\alpha\sigma\alpha^{-1}, \alpha\tau\alpha^{-1}$ ganz S_p erzeugen. Da je zwei Transpositionen konjugiert sind, können wir o.B.d.A. $\tau = (1\,2)$ annehmen. Weiter existiert ein i mit $1 \leqslant i \leqslant p - 1$ und $\sigma^i(1) = 2$. Da p eine Primzahl ist, erzeugen σ und σ^i dieselbe Untergruppe von S_p, insbesondere ist darum $\langle\sigma, \tau\rangle = \langle\sigma^i, \tau\rangle$. Wir können deshalb o.B.d.A. $\sigma(1) = 2$ annehmen. Nach Konjugation mit einer geeigneten Permutation der Elemente $\{3, \ldots, p\}$ (diese lässt $\tau = (1\,2)$ invariant) können wir schliesslich sogar $\sigma = (1\,2\,\ldots\,p)$ annehmen.

Da sämtliche Transpositionen ganz S_p erzeugen, genügt es zu zeigen, dass jede Transposition von $\sigma = (12\,\ldots\,p)$ und $\tau = (1\,2)$ erzeugt wird. In der Tat werden Transpositionen $(i\;i+1)$ benachbarter Elemente wegen

$$(i\;i+1) = \sigma^{i-1}\tau\sigma^{-(i-1)}$$

von σ und τ erzeugt. Eine beliebige Transposition $(k\,l)$ mit $1 \leqslant k < l \leqslant p$ kann via

$$(k\,l) = (k\;k+1)\cdots(l-2\;l-1)(l-1\;l)(l-2\;l-1)\cdots(k\;k+1)$$

als Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente geschrieben werden und wird darum auch von σ und τ erzeugt.