Algebra I

Musterlösung 17

Separable und normale Körpererweiterungen

---

100. Finde ein Beispiel einer algebraischen Körpererweiterung $L : K$ mit den folgenden Eigenschaften.

(a) $L : K$ ist endlich, nicht separabel und K hat positive Charakteristik.

(b) $L : K$ ist nicht endlich, aber normal.

(c) $L : K$ ist nicht endlich und nicht normal.

Lösung: (a) Nach Aufgabe 90 hat z.B. die Erweiterung $\mathbb{F}_p(t) : \mathbb{F}_p(t^p)$ für jede Primzahl p die gewünschten Eigenschaften.

(b) Zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$ und $L = \overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Diese Erweiterung hat unendlichen Grad, da z.B. für jede positive natürliche Zahl n der Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = n$ ist.

(c) Zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$ und $L = \overline{\mathbb{Q}}^+$ aus Aufgabe 97. Dann hat das irreduzible Polynom $X^n - 2$ für jede positive natürliche Zahl $n \geq 3$ mindestens eine, aber höchstens zwei seiner n Nullstellen in L.

101. (a) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung.

Zeige: Ist $[L : K]$ teilerfremd zu p, so ist $L : K$ separabel.

(b) Wann ist eine Körpererweiterung vom Grad 2 inseparabel?

Lösung: (a) Sei $a \in L$ beliebig, und sei f das Minimalpolynom von a über K. Wir betrachten den Körperturm $L : K(a) : K$. Wegen $p \nmid [L : K]$ und der Multiplikativität des Körpergrades ist auch $[K(a) : K]$ nicht durch p teilbar. Folglich ist $\deg(f) = [K(a) : K]$ teilerfremd zu p. Daher ist $D\,f \neq 0$, folglich haben f und $D\,f$ keinen gemeinsamen Teiler und f, und folglich auch $[K(a) : K]$, ist nach Aufgabe 89a separabel. Da a beliebig war, ist damit $L : K$ eine separable Erweiterung.

(b) Nach Teil a) gilt $\mathrm{Char}(K) = 2$. Eine Körpererweiterung $L : K$ ist genau dann inseparabel, wenn ein Erzeuger inseparables Minimalpolynom hat. Ein irreduzibles Polynom $X^2 + bX + c$ vom Grad 2 in $K[X]$ ist genau dann inseparabel, wenn $b = 0$ ist. Also ist eine Körpererweiterung $L : K$ vom Grad 2 genau dann inseparabel, wenn sie von der Form $K(a) : K$ mit $a^2 \in K$ in Charakteristik 2 ist.

102. Zeige: Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.

Lösung: Sei $L : K$ eine algebraische Erweiterung eines perfekten Körpers K. Für jedes $a \in L$ ist das Minimalpolynom $m_{a,K} \in K[X]$ irreduzibel. Da K perfekt ist, ist es folglich separabel. Daher ist a separabel über K, und die Körpererweiterung $L : K$ ist separabel.

Für die andere Richtung sei jede algebraische Erweiterung eines Körpers K separabel über K. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel. Da Multiplikation mit Elementen aus K^* die Separabilität von f nicht beeinflusst, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f normiert ist. Dann ist $L := K[X]/(f)$ algebraisch über K, und die Restklasse von X hat das Minimalpolynom f. Da $L : K$ separabel ist, ist folglich f separabel. Also ist K perfekt.

103. Sei $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i. $L : K$ ist normal.

ii. Für jeden Körperhomomorphismus $\varphi\colon L \to \overline{L}$ mit $\varphi|_K = id$ gilt $\varphi(L) \subseteq L$.

iii. Für jeden Körperhomomorphismus $\varphi\colon L \to \overline{L}$ mit $\varphi|_K = id$ gilt $\varphi(L) = L$.

Lösung: Die Implikation iii.⇒ii. ist offensichtlich.

Wir zeigen nun ii.⇒i. Sei $f \in K[X]$ ein irreduzibles nichtlineares Polynom, das eine Nullstelle a in L hat. Sei $b \in \overline{L}$ eine weitere Nullstelle von f. Nach Satz 14.4 existiert ein Körperhomomorphismus $\varphi\colon K(a) \to \overline{L}$ mit $\varphi|_K = id$ und $\varphi(a) = b$.

Variante mit Satz 17.5: Mit dem Satz 17.5 können wir φ zu einem Körperhomomorphismus $\overline{K(a)} \to \overline{L}$ erweitern. Diese Erweiterung auf L eingeschränkt liefert eine Erweiterung $\overline{\varphi}\colon L \to \overline{L}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{\varphi}(L) \subseteq L$, folglich ist $b \in L$. Da b beliebig war, zerfällt f über L. Somit ist $L : K$ normal.

Variante mit Kuratowski-Zorn Lemma: Mit Hilfe des Lemmas von Kuratowski-Zorn können wir φ zu einem Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon L \to \overline{L}$ erweitern; die partielle geordnete Menge hierfür ist die Menge aller Paare (K', ψ), für die K' ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $L : K(a)$ ist, $\psi\colon K' \to \overline{L}$ ein Körperhomomorphismus und $(K', \psi) \leq (M', \theta)$ genau dann, wenn $K' \subseteq M'$ und $\theta|_{K'} = \psi$. Nach Voraussetzung ist $\overline{\varphi}(L) \subseteq L$, folglich ist $b \in L$. Da b beliebig war, zerfällt f über L. Somit ist $L : K$ normal.

Variante mit transfiniter Induktion: Sei $\{a_\alpha : \alpha \in \lambda\} = L$ eine Wohlordnung von L für eine Ordinalzahl λ wobei $a_0 := a$. Sei $K_0 := K(a)$ und sei $\varphi_0 := \varphi$. Sind, für ein $\alpha \in \lambda$, K_α und φ_α bereits bestimmt und ist $K_\alpha \subsetneq L$, so sei, mit Satz 14.4, $K_{\alpha+1} := K_\alpha(a_{\alpha+1})$ und $\varphi_{\alpha+1} : K_{\alpha+1} \to \overline{L}$ ein Homomorphismus der φ_α erweitert. Für Limesordinalzahlen $\gamma \in \lambda$ definieren wir $K_\gamma := \bigcup_{\alpha\in\gamma} K_\alpha$ und $\varphi_\gamma := \bigcup_{\alpha\in\gamma} \varphi_\alpha$. Dann ist $\bigcup_{\alpha\in\lambda} K_\alpha = L$ (weil $L : K$ algebraisch ist) und $\overline{\varphi} := \bigcup_{\alpha\in\lambda} \varphi_\alpha$ ist ein Homomorphismus $L \to \overline{L}$. Nach Voraussetzung ist also $\overline{\varphi}(L) \subseteq L$ und da b beliebig war, zerfällt f über L. Somit ist $L : K$ normal.

Als letztes zeigen wir i.⇒iii. Sei φ wie in iii. Sei $a \in L$. Sei f das Minimalpolynom von a über K. Es gilt also $f(\varphi(a)) = \varphi(f(a)) = 0$, also ist das Bild von a unter φ ebenfalls eine Nullstelle von f. Da $L : K$ normal ist, ist somit $\varphi(a) \in L$. Da a beliebig war, folgt $\varphi(L) \subseteq L$. Ausserdem induziert φ nach diesem Argument eine Permutation der Nullstellen von f. Daher liegt a auch im Bild von φ, somit ist $\varphi(L) = L$.

104. Ist für folgendes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ normal? Falls nicht, bestimme eine *normale Hülle* der Erweiterung, d.h. einen kleinsten Oberkörper $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)}$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$, sodass $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)} : \mathbb{Q}$ normal ist.

(a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$

Lösung: (a) Druch doppeltes Quadrieren erhalten wir, dass α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ ist. Dieses ist nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und deshalb das Minimalpolynom von α. Die anderen drei Nullstellen von f sind $-\alpha$ und

$$\pm\sqrt{2-\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \pm\frac{\alpha^2 - 2}{\alpha}$$

und liegen ebenfalls in $\mathbb{Q}(\alpha)$. Also ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper von f und somit ist die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ normal.

(b) Doppeltes Quadrieren ergibt, dass α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2$ ist. Dieses ist nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und deshalb das Minimalpolynom von α. Die anderen drei Nullstellen von f sind $-\alpha$ und

$$\pm i\sqrt{\sqrt{3}-1} = \pm\frac{i\sqrt{2}}{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}.$$

Der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$ ist somit $\mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{\sqrt{3}-1}) = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$. Da dieser nicht in $\mathbb{Q}(\alpha)$ enthalten ist, ist $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ somit nicht normal. Seine normale Hülle in $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$.