Algebra I

Musterlösung 22

Kreisteilungskörper, auflösbare Gruppen

---

132. Sei p eine Primzahl und sei $\xi := e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

Zeige: $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}\big) \cong C_{p-1}$.

Lösung: Die p-ten Einheitswurzeln bilden eine Gruppe, die isomorph zu C_p ist. Die Restriktion $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(\langle\xi\rangle), \sigma \mapsto \sigma|_{\langle\xi\rangle}$ ist wohldefiniert, da alle primitiven Einheitswurzeln nach der vorigen Serie dasselbe Minimalpolynom haben, und injektiv, da ein Element der Galoisgruppe durch das Bild von ξ eindeutig festgelegt ist. Weiter wissen wir aus der Algebra I, dass $C_{p-1} = \mathrm{Aut}(C_p)$ ist. Somit haben $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q})$ und $\mathrm{Aut}(\langle\xi\rangle)$ dieselbe Kardinalität und die Restriktion ist somit auch surjektiv, also ein Gruppenisomorphismus.

133. Finde ein Beispiel einer Gruppe G und Untergruppen $H, N \leq G$, sodass $H \trianglelefteq N$ und $N \trianglelefteq G$ ist, aber H ist kein Normalteiler von G.

Lösung: Zum Beispiel $G = A_4$, $N = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \cong C_2 \times C_2$ und $H = \{e, (1\,2)(3\,4)\}$.

Eine Gruppe G heisst **auflösbar**, falls eine Folge von Untergruppen $H_i \leq G$ existiert mit $\{e\} = H_0 \leq \cdots \leq H_n = G$, so dass für alle $0 \leq i \leq n-1$ gilt

- $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$,
- H_{i+1}/H_i ist abelsch.

134. (a) Zeige, dass für $n = 2, 3, 4$ die Gruppe S_n auflösbar ist.

(b) Zeige, dass für $n \geq 5$ die Gruppe S_n nicht auflösbar ist.

Lösung: (a) Für $n = 2$ ist die Gruppe bereits abelsch und $\{e\} \trianglelefteq S_2$ ist eine Normalreihe wie in der Definition.

Für $n = 3$ ist A_3 abelsch und $\{e\} \trianglelefteq A_2 \trianglelefteq S_3$ ist eine Normalreihe wie in der Definition.

Für $n = 4$ ist $\{e\} \trianglelefteq N \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$ mit $N = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \cong C_2 \times C_2$ eine Subnormalreihe, denn $|A_4/N| = \frac{|A_3|}{|N|} = 3$ und alle Gruppen der Ordnung 3 sind abelsch.

(c) Nach Aufgabe 131 ist A_n der einzige nichttriviale Normalteiler von S_n und noch dazu einfach. Also müsste eine Normalreihe mit $A_n \trianglelefteq S_n$ beginnen, kann aber nicht mehr weitergeführt werden.

135. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i. Die Gruppe G ist auflösbar.

ii. Die Gruppe G besitzt eine Subnormalreihe $\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$, sodass H_{i+1}/H_i jeweils zyklisch mit primer Ordnung ist.

Lösung: Die Implikation ii. $\Rightarrow$ i. ist trivial.

Wir benutzen folgendes Lemma.

Lemma: Seien K_1, K_2 Gruppen und sei $\varphi\colon K_1 \to K_2$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sei weiter $K \trianglelefteq K_2$ ein Normalteiler. Dann gilt $K_1/\varphi^{-1}(K) \cong K_2/K$.

Beweis: Sei $\bar{\varphi}\colon K_1 \to K_2/K$ die Verknüpfung von φ mit der Projektion. Dann ist $\bar{\varphi}$ surjektiv und $\varphi^{-1}(K) = \ker(\bar{\varphi})$. Die Aussage folgt nun mit dem 1. Isomorphiesatz.

Falls $|H_i/H_{i-1}|$ für alle i prim ist, sind wir fertig. Sei also i so dass $|H_i/H_{i-1}|$ keine Primzahl ist. Wähle ein $a \in H_i/H_{i-1}$ mit $\{e\} \neq \langle a\rangle \neq H_i/H_{i-1}$. Sei $\pi\colon H_i \to H_i/H_{i-1}$ die kanonische Projektion. Sei $H := \pi^{-1}(\langle a\rangle)$. Da H_i/H_{i-1} abelsch ist, gilt $\langle a\rangle \trianglelefteq H_i/H_{i-1}$ und folglich $H \trianglelefteq H_i$. Ausserdem ist $H_{i-1} = \pi^{-1}(H_{i-1}) \trianglelefteq H$. Wir haben somit die verfeinerte Normalreihe

$$\{e\} \trianglelefteq H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{i-1} \trianglelefteq H \trianglelefteq H_i \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G.$$

Wegen des Lemmas ist $H_i/H \cong (H_i/H_{i-1})/\langle a\rangle$, also ein Quotient einer abelschen Gruppe und somit abelsch. Ausserdem ist H/H_{i-1} eine Untergruppe von H_i/H_{i-1} und somit abelsch.

Dieses Prozedere können wir wiederholen, bis alle Quotienten Primzahlordnung haben. Da G endlich ist, sind wir in endlich vielen Schritten fertig.

136. Sei G eine Gruppe, sei $H \leq G$ eine Untergruppe, und sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Ist G auflösbar, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist G auflösbar, so ist auch G/N auflösbar.

(c) Sind N und G/N auflösbar, so ist auch G auflösbar.

Lösung: (a) Sei G auflösbar und sei $\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$ eine Normalenreihe wie in der Definition der Auflösbarkeit. Dann ist $H_{i-1} \cap H \trianglelefteq H_i \cap H$ und mit dem 2. Isomorphiesatz gilt

$$\begin{aligned}(H_i \cap H)/(H_{i-1} \cap H) &= (H_i \cap H)/(H_{i-1} \cap H_i \cap H)\\ &\cong ((H_i \cap H)(H_i \cap H))/H_{i-1} = (H_i \cap H)/H_{i-1}.\end{aligned}$$

Somit ist H auflösbar mit Normalenreihe $\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \cap H \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n \cap H = H$.

(b) Sei G auflösbar und sei $\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$ eine Normalenreihe wie in der Definition der Auflösbarkeit. Sei $\pi\colon G \to G/N$ die Projektion. Dann ist $\pi(H_{i-1}) \trianglelefteq \pi(H_i)$. Ausserdem gibt es eine offensichtliche surjektive Abbildung $H_i \to \pi(H_i) \to \pi(H_i)/\pi(H_{i-1})$, deren Kern gleich $\pi^{-1}(H_{i-1})$ ist. Daraus folgern wir $\pi(H_i)/\pi(H_{i-1}) \cong H_i/\pi^{-1}(H_{i-1})$ mit dem 1. Isomorphiesatz. Jetzt können wir den 3. Isomorphiesatz anwenden und erhalten $H_i/\pi^{-1}(H_{i-1}) \cong (H_i/H_{i-1})/(H_{i-1}/\pi^{-1}(H_{i-1})$. Somit ist $\pi(H_i)/\pi(H_{i-1})$ ein Quotient einer abelschen Gruppe, also ebenfalls abelsch. Also ist G/N auflösbar mit Normalenreihe $\{e\} = \pi(H_0) \trianglelefteq \pi(H_1) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \pi(H_n) = G/N$.

(c) Sei $\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = N$ eine Normalenreihe für N wie in der Definition der Auflösbarkeit. Sei $\{e\} = K_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m = G/N$ eine Normalenreihe für G/N wie in der Definition der Auflösbarkeit. Sei $\pi\colon G \to G/N$ die Projektion. Dann ist G auflösbar mit Normalenreihe

$$\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = N = \pi^{-1}(K_0) \trianglelefteq \pi^{-1}(K_1) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \pi^{-1}(K_m) = G,$$

denn nach dem Lemma in der Lösung von Aufgabe 135 sind alle $\pi^{-1}(K_i)/\pi^{-1}(K_{i-1})$ abelsch, da isomorph zu K_i/K_{i-1}.