Algebra I

Musterlösung 23

Radikalerweiterungen

---

137. Finde eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$, welche die folgende komplexe Zahl enthält.

(a) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt[7]{23}}{\sqrt[4]{5}}$

(b) $(\sqrt{6}+2\sqrt[3]{5})^4$

(c) $\frac{2\sqrt[5]{5}-4}{\sqrt{1+\sqrt{99}}}$

Lösung: (a) Zum Beispiel $\mathbb{Q}(\sqrt{11}, \sqrt[7]{23}, \sqrt[4]{5})$

(b) Zum Beispiel $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt[3]{5})$

(c) Zum Beispiel $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \sqrt{11}, \sqrt{1+3\sqrt{11}})$

138. (a) Sei $K : \mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung, sodass $[K : \mathbb{Q}]$ eine ungerade Primzahl ist. Zeige: Wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dann ist $K : \mathbb{Q}$ keine Radikalerweiterung.

(b) Finde ein Beispiel von Körpererweiterungen $M : L : K$, sodass $M : K$ eine Radikalerweiterung ist, $L : K$ aber nicht.

Lösung: (a) Da $p := [K : \mathbb{Q}]$ eine ungerade Primzahl ist, hat die Erweiterung $K : \mathbb{Q}$ keine echten Zwischenkörper. Falls sie eine Radikalerweiterung ist, muss somit ein Erzeuger $a \in K$ der Erweiterung existieren, sodass $a^q \in \mathbb{Q}$ liegt für eine natürliche Zahl $q \geq p$. Wegen der Normalität müssen somit alle Nullstellen des Minimalpolynoms f von a über $\mathbb{Q}$, ein Teiler von $X^q - a^q$ vom Grad p, in K liegen, also auch p der q-ten Einheitswurzeln. Diese sind aber nicht reell.

Bemerkung: Mit der letzten Aufgabe dieser Serie können wir annehmen, dass q eine Primzahl ist. Wir können dann sogar $p = q$ zeigen. Wegen $f|(X^q - a^q)$ und $\deg(f) = p \geq 3$ enthält f eine q-te Einheitswurzel. Da q prim ist, ist diese primitiv. Somit gilt $p = [K : \mathbb{Q}] \geq q - 1$. Andereseits folgt aus $f|(X^q - a^q)$ natürlich $p \leq q$. Dies impliziert $p = q$.

(b) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $M = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{7}})$. Laut Aufgabe 132 ist $\mathrm{Gal}(M : K) \cong C_6$. Definiere nun $L := \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{7})) = \mathbb{Q}(\frac{e^{\frac{2\pi i}{7}} + e^{-\frac{2\pi i}{7}}}{2})$. Mit $[M : L] = 2$ folgt $[L : \mathbb{Q}] = 3$. Da $\mathrm{Gal}(M : L)$ normal in $\mathrm{Gal}(M : K)$ ist, ist die Erweiterung $L : \mathbb{Q}$ normal. Ausserdem gilt $L \subset \mathbb{R}$, also kann die Erweiterung $L : \mathbb{Q}$ nach Teil (a) keine Radikalerweiterung sein.

139. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom.

Zeige: Ist eine Nullstelle von f durch Radikale ausdrückbar, so gilt das für alle Nullstellen.

Lösung: Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Sei $L \subseteq \overline{K}$ der Zerfällungskörper von f. Sei a eine Nullstelle von f, die in einer Radikalerweiterung von K liegt. Das bedeutet, es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \overline{K}$ mit $a \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, sowie $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ mit

$\alpha_i^{n_i} \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$. Sei b eine weitere Nullstelle von f. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L : K)$ mit $\sigma(a) = b$. Es existiert eine Erweiterung $\overline{\sigma}\colon \overline{K} \to \overline{K}$ von σ. Wegen $\alpha_i^{n_i} \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ ist $\overline{\sigma}(\alpha_i)^{n_i} \in \overline{\sigma}(K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})) = K(\overline{\sigma}(\alpha_1), \dots, \overline{\sigma}(\alpha_{i-1}))$. Somit ist auch b durch Radikale ausdrückbar.

Aliter: Nach Voraussetzung ist eine Nullstelle von f in einer Radikalerweiterung L von K enthalten. Nach der nächsten Aufgabe ist die normale Hülle $\tilde{L}$ von $L : K$ ebenfalls eine Radikalerweiterung von K. Da $\tilde{L}$ normal über K ist und eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms f enthält, enthält $\tilde{L}$ alle Nullstellen von f. Also sind alle Nullstellen von f durch Radikale ausdrückbar.

140. Sei $L : K$ eine Radikalerweiterung in $\mathbb{C}$ und sei $\tilde{L}$ die normale Hülle von $L : K$.

Zeige: $\tilde{L} : K$ ist eine Radikalerweiterung.

Lösung: Sei $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ wie in der Definition einer Radikalerweiterung, d.h. es existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i^{n_i} \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion nach m.

Sei zuerst $m = 1$, also $L = K(\alpha)$ mit $\alpha^n \in K$. Dann teilt das Minimalpolynom von α über K das Polynom $X^n - \alpha^n$. Also gilt für alle Nullstellen $a_1, \dots, a_k$ des Minimalpolynoms von α über K, wobei $\alpha = a_1$, ebenfalls $a_i^n \in K$, also ist $\tilde{L} = K(a_1, \dots, a_k)$ mit jeweils $a_i^n \in K \subset K(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Sei nun die Aussage bewiesen für $m - 1$. Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α_m. Sei b eine weitere Nullstelle von f in $\tilde{L}$. Es genügt zu zeigen, dass b^{n_m} in der normalen Hülle $\tilde{L}_{m-1}$ von $K(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) : K$ liegt. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde{L} : K)$ mit $\sigma(\alpha_m) = b$. Dann ist $b^{n_m} = \sigma(\alpha_m^{n_m})$. Da $\alpha_m^{n_m} \in \tilde{L}_{m-1}$ liegt, ist nach Aufgabe 103 auch $\sigma(\alpha_m^{n_m}) \in \tilde{L}_{m-1}$. Somit sind wir fertig.

141. Sei $L : K$ eine Radikalerweiterung.

Zeige: Es existieren $\beta_1, \dots, \beta_k \in L$ und Primzahlen $p_1, \dots, p_k$ mit $\beta_j^{p_j} \in K(\beta_1, \dots, \beta_{j-1})$ für alle $1 \leq j \leq k$.

Lösung: Sei $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ wie in der Definition einer Radikalerweiterung, d.h. es existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i^{n_i} \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$. Wenn alle n_i prim sind, sind wir fertig. Sei ansonsten n_i nicht prim. Dann ist n_i ein Produkt nicht notwendigerweise verschiedener Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ und wir können a_i durch die Elemente $a^{\frac{n_i}{p_1}}, a^{\frac{n_i}{p_1 p_2}}, \dots, a^{\frac{n_i}{p_1 p_2 \cdots p_n}}$ ersetzen.